

Controlador óptimo con observación de estados basado en el principio del máximo de Pontryagin de bajo costo computacional

Herrera, Martín^{1*}; Pucheta, Julián^{1,2}; Salas, Carlos²; Patiño, H. Daniel³; Rodríguez Rivero, Cristian⁴

(1) *Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca, Maximio Victoria 55, SFV de Catamarca, Argentina. mherrera@tecno.unca.edu.ar*

(2) *Departamento de Electrónica, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina. jpucheta@unc.edu.ar*

(3) *Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Av. Libertador General San Martín (Oeste) N° 1109. San Juan, Argentina. dpatino@inaut.unsj.edu.ar*

(4) *Cardiff School of Technologies, Cardiff Metropolitan University, Western Avenue, Cardiff, CF5 2YB, Wales. CRodriguezRivero@cardiffmet.ac.uk*

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología de diseño de un sistema controlador observador lineal cuadrático basado en el principio del máximo de Pontryagin para sistemas invariantes en el tiempo. Esto intenta contribuir a la necesidad de hacer que un proceso evolucione de una manera deseada, donde una variable evoluciona de un valor inicial dado a un valor final deseado por el usuario, a una velocidad acorde a los esfuerzos de la variable de control. Se considera la necesidad de la medición del vector de estados a partir del modelo, incorporando para ello un observador de estados. El cálculo clásico requiere resolver la ecuación matricial de Riccati, que involucra una descomposición espectral matricial que en el presente método es evitada. Para el cálculo del observador se emplea la metodología del dual del sistema original. Se muestran resultados en sistemas de dos, tres y cuatro variables de estado, donde se incorporaron los observadores correspondientes que incrementan el orden del sistema de lazo cerrado al doble y un orden incrementado debido a la integral del error de control.

ABSTRACT

In this paper, a methodology for the design of a quadratic linear observer-controller system based on the Pontryagin maximum principle for time-invariant systems is presented. The aim is to contribute to the need to make a process evolve in a desired way, where a variable evolves from a given initial value to a final value desired by the user at speed commensurate with the efforts of the control variable. The need to measure the state vector from the model is considered by incorporating a state observer. Classical calculations require solving the Riccati matrix equation, which involves a matrix spectral decomposition that is avoided in the present method. To calculate the observer, the dual methodology of the original system was used. Results are shown with two, three, and four state variables systems, where the corresponding observers that double the order of the closed-loop system and an increased order due to the integral of the control error were incorporated.

Palabras Clave: Control optimo, Hamilton – Jacobi – Bellman, Procesos dinámicos, Control automático.

Keywords: optimal control, Hamilton Jacobi Bellman equation, Dynamic process, Automatic control

1. INTRODUCCIÓN

Es frecuente que en los problemas de ingeniería se requiera que un proceso evolucione de una manera deseada, obteniendo un determinado valor en un tiempo acotado. En el caso de diseñar un control óptimo esto se ve con la dificultad de realizar constantes simulaciones en procesadores avanzados hasta llegar a una solución adecuada, con el método presentado se podrán ajustar los parámetros en línea en microcontroladores de bajo costo por el bajo coste computacional que presenta. Casos de ejemplos son el control de ángulo mediante un motor eléctrico, o lograr que un sistema inestable se estabilice en un equilibrio inestable como es el caso del péndulo invertido que puede relacionarse al caso de llevar una carga útil al espacio, control de estabilización de vehículos aéreos, etc. Se puede atender a esas necesidades con diversos planteos (Kirk 1970, Bertsekas 1996), pero si se agrega la restricción de que la solución debe demandar escasos recursos computacionales con el fin de implementarlo en un sistema embebido en tiempo real, se empiezan a acotar las propuestas (Herrera et al., 2021). En este trabajo se va a generar una solución de diseño para un sistema de un motor controlador con observación de variables de estados para ser aplicado en forma embebida en un microcontrolador.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Para resolver el problema propuesto, se usa el esquema control con observación de estados que detalla por Dorf (2005). Allí está representada el sistema de ecuaciones de estado del sistema y el observador. La variable u_t representa la acción de control que puede emplearse para modificar la evolución de la variable de salida, que está representada por y_t . El objetivo de control es que y_t siga una referencia constante fijada por el usuario. Eso se logra mediante el esquema de orden incrementado (Ogata, 2010), que resulta en incrementar en uno el orden del vector de estados. Para la implementación del sistema se va a considerar la representación dinámica lineal de un sistema como

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u_t \tag{1}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t \tag{2}$$

y el sistema observador definido como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_t = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{B}u_t + \mathbf{K}_o(y_t - \hat{y}_t) \tag{3}$$

$$\hat{y}_t = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_t \tag{4}$$

donde \mathbf{A} es la matriz de estados, \mathbf{B} la matriz de entrada, \mathbf{C} la matriz de salida, \mathbf{K}_o es el observador que debe calcularse, \mathbf{x}_t es el vector de estados que contiene n variables, $\hat{\mathbf{x}}_t$ es el vector de estados observado obtenido de resolver la ecuación diferencial (3), u_t es la entrada y_t es la salida y \hat{y}_t es la salida observada. El controlador tiene el objetivo de que la salida y evolucione de una manera deseada, alcanzando una referencia y_{ref} . Se define entonces, el error de control como

$$\xi_t = y_t - y_{ref} \tag{5}$$

y el controlador va a considerar a la función ξ_t , para lograr el objetivo de control.

2.1 Formulación del problema

En virtud del modelo del proceso representado por su modelo lineal en (1) y (2), contando con su observador definido en las expresiones (3) y (4) se propone la ley de control lineal

$$u_t = [-\kappa \quad \mathbf{K}_I] \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \tag{6}$$

donde la acción de control u_t se obtiene a partir del vector de estados observados y la integral del error de la variable de interés, siendo κ y \mathbf{K}_I las ganancias del controlador a determinar. El sistema (1) se amplía en un orden dada la integral del error ξ_t , por lo que ahora el vector de estados tiene orden $n+1$. A esta versión lineal se la puede representar en la forma canónica controlable con un controlador \mathbf{K} empleando una transformación a través de la matriz \mathbf{T} (Ogata, 2010) puede hallarse las ganancias como

$$[\kappa \quad -\mathbf{K}_I] = \mathbf{K}\mathbf{T}^{-1} \tag{7}$$

se convierte al sistema original en un modelo del proceso expresado en su forma canónica controlable, es decir

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_t \quad (8)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot x_t \quad (9)$$

donde x es el vector de estados de $n+1$ componentes, y la salida y tiene dos componentes lo que no quita generalidad al resultado encontrado del valor de K . Se propone un funcional de costo a minimizar definido como

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_t^T Q x_t + R u_t^2] dt \quad (10)$$

siendo Q una matriz simétrica y semi definida positiva, y R una matriz definida positiva, que son matrices de penalización definidas por el ingeniero diseñador del controlador. Para resolver el problema del controlador óptimo, se emplea el método descrito en (Herrera et al., 2021), resumido a continuación.

2.2 Cálculo del controlador

Se definen los valores de las matrices Q y R , para un caso de 3 variables de estado y una variable de salida, aunque en los casos trabajados en este estudio se tiene que R es un escalar, así

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, R = R. \quad (11)$$

Una vez fijados Q y R , se procede a hallar el controlador, junto con los parámetros de la matriz de estados del sistema expresada en su forma canónica controlable, obteniendo el controlador canónico

$$K = \frac{1}{2R} [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] \quad (12)$$

y luego el controlador para implementar en sistema original como

$$[K \ -K_1] = \frac{1}{2R} [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] T^{-1} \quad (13)$$

donde los parámetros p_i se calculan mediante

$$p_1 = \frac{-4a_4 R + \sqrt{(4a_4 R)^2 + 16q_1 R}}{2} \quad (14)$$

$$p_2 = \frac{-4a_3 R + \sqrt{(4a_3 R)^2 + 16q_2 R}}{2} \quad (15)$$

$$p_3 = \frac{-4a_2 R + \sqrt{(4a_2 R)^2 + 16q_3 R}}{2} \quad (16)$$

y para p_4 ,

$$p_4 = \frac{-3a_1 R + \sqrt{(3a_1 R)^2 + 8q_4 R}}{2}. \quad (17)$$

La demostración detallada basada en el principio del máximo de Pontryagin está en (Herrera et al., 2021). El cálculo detallado en las ecuaciones (14) a (17) puede emplearse para cualquier orden del sistema, sólo cambiando los coeficientes en el orden adecuado. Es decir, para implementar el controlador en el sistema, debe convertirse el controlador hallado al formato en el que se encuentre el sistema lineal, que no va a estar necesariamente en el formato canónico controlable.

2.3 Cálculo del observador

Para hacer el cálculo del observador, se emplea el método del sistema dual (Ogata, 2010) y a éste se le aplica el cálculo de un controlador LQR detallado en el apartado anterior. Esto es

$$A_d = A^T, B_d = C^T \quad (18)$$

pero como ahora B tiene dos columnas porque según la Ec. (9) C tiene dos filas, para aplicar el método se hace la transformación lineal de B_d a un vector b como

$$[A - B K] = [A - B h k] \quad (19)$$

De tal manera que el par $(A, B h)$ sea controlable, y ahora $B h$ es un vector y así R del funcional (10) puede ser un escalar. Por lo tanto, aplicando el método descrito para el sistema dual, se obtiene un controlador que transpuesto será el observador K_o de la Ec. (3),

$$K_o = [h k T^{-1}]^T. \quad (20)$$

Ahora se cumple con el requisito de que el observador sea estable, es decir que el error de observación de estados definido como

$$\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t \quad (21)$$

tienda exponencialmente a cero ya que la ecuación diferencial del error definida como

$$\dot{\tilde{x}} = [A - K_o C] \tilde{x}, \quad (22)$$

tiene los autovalores con parte real negativa.

En la aplicación, el método detallado en (Herrera et al., 2021) se reduce a proponer los valores de la diagonal de las matrices Q y R que para el observador pueden ser llamadas Q_o y R_o para diferenciarlas de las del controlador.

3. RESULTADOS

La solución propuesta ha sido usada en sistemas de diversa complejidad, cuando se compara con los métodos clásico de entrada-salida (Dorf, 2005; Ogata, 2010). Se muestran resultados de cuatro casos en esta sección.

3.1 Sistema de segundo orden

El primer caso, es un sistema de fase no mínima típico de sistemas con retardo, extraído de la literatura (Dorf, 2005), con su función de transferencia definida en variable s de Laplace como

$$G(s) = \frac{2s - 1}{s^2 + 3s + 6}. \quad (23)$$

En este caso, el sistema es de segundo orden, pero al tener referencia no nula con integrador pasa a ser de tres y el observador de orden dos. Así el sistema completo es de orden cinco. Los valores para calcular el controlador de las matrices de diseño Q y R fueron Q₁₁=1·10³, Q₂₂=1·10⁴, Q₃₃=1·10⁵, R=1·10⁻¹ y para el observador Q_{o11}=1·10³, Q_{o22}=1·10⁵, R_o=1·10⁻¹. Los resultados de observan en la Fig. 1, donde está detallado el error de observación de estados en la gráfica del medio. En la superior está la evolución de la salida, que tiene como referencia el valor de 10 y abajo está la acción de control del sistema de fase no mínima controlado. El valor de R puede ser ajustado de en línea, para cambiar las respuestas del sistema.

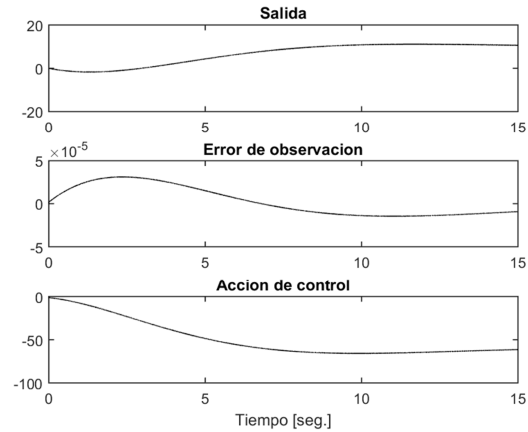


Fig. 1. Control de un sistema de segundo orden de fase no mínima.

3.2 Sistema de tercer orden

Con el mismo procedimiento, se controló el ángulo de un motor que trabaja con un torque pequeño para fines industriales que normalmente se usa con reductor, con las ecuaciones

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_A}{L_{AA}} i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} v_a \quad (24)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{K_t}{J} i_a - \frac{B_m}{J} \omega_r - \frac{1}{J} T_L \quad (25)$$

$$\frac{d\theta_t}{dt} = \omega_r. \quad (26)$$

con los valores siguientes para los coeficientes: L_{AA}=366·10⁻⁶, J=5·10⁻⁹, R_A=55.6, B_m=0, K_t=6.49·10⁻³, K_m=6.53·10⁻³. El modelo es de tercer orden, donde la corriente i_a, la velocidad angular ω_r y el ángulo θ_t forman el vector de estado, lo que genera un sistema control con observación de estados de referencia no nula de orden siete. Los valores de diseño para emplear el método detallado en (Herrera et al., 2021) fueron Q₁₁=1·10²¹, Q₂₂=1·10¹⁸, Q₃₃=1·10¹³, Q₄₄=1, R=1·10⁻⁷ y para el cálculo del observador Q_{o11}=1, Q_{o22}=1, Q_{o33}=1, R_o=1. Los resultados para un torque del orden de 1,16·10⁻⁶ Nm se detallan en la Fig. 2 para una referencia de θ_{ref} de 2 radianes.

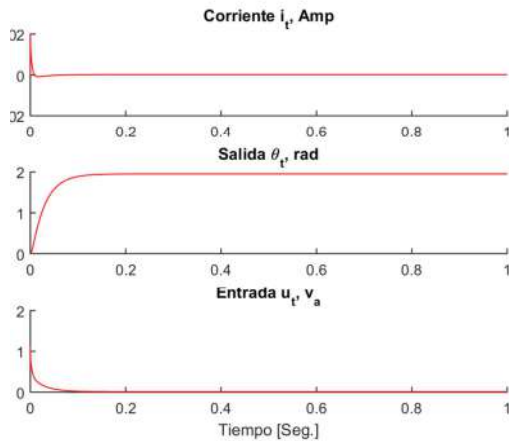


Fig. 2. Control de un motor de corriente continua para torques pequeños.

Análogo a lo anterior para un motor de tamaño mediano y de uso frecuente en la industria, se realizó el diseño del sistema de control con observación de estados con los valores de diseño $Q_{11}=1 \cdot 10^5$, $Q_{22}=1 \cdot 10^5$, $Q_{33}=1 \cdot 10^5$, $Q_{44}=1 \cdot 10^2$, $R=1$ y para el cálculo del observador $Q_{O11}=1 \cdot 10^3$, $Q_{O22}=1$, $Q_{O33}=1$, $R_o=1 \cdot 10^{-1}$. En la Fig. 3 se muestran los resultados para un torque que está en el orden de 0,01 Nm y una referencia de ángulo de θ_{ref} de 2 radianes.

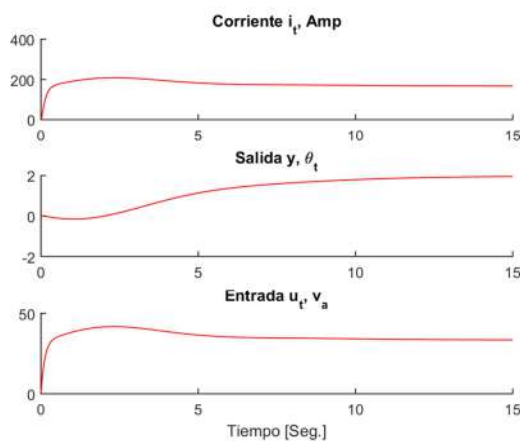


Fig. 3. Control de un motor de corriente continua para torques medianos.

3.3 Sistema de cuarto orden

Para finalizar, se implementó el mismo método para controlar un sistema de péndulo invertido como muestra la Fig. 4.

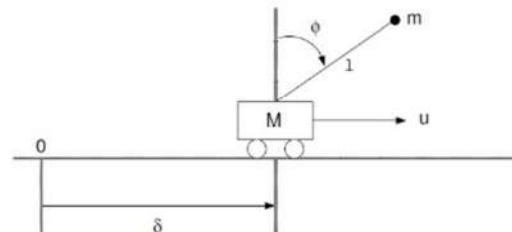


Fig. 4. Sistema del péndulo.

Este sistema, detallado en (Pucheta et al., 2017) es definido como

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{\delta} + m\ddot{\phi} \cos \phi - m\dot{\phi}^2 \sin \phi + F\dot{\delta} = u \\ l\ddot{\phi} - g \sin \phi + \ddot{\delta} \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (27)$$

siendo ϕ el ángulo del péndulo respecto de la vertical, y δ el desplazamiento horizontal respecto del origen, como muestra la Fig. 4. Empleando Taylor en el equilibrio superior, se tiene la versión lineal para el equilibrio inestable, es decir, con la masa m ubicado en la parte superior, se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{IM} & \frac{g(m+M)}{IM} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{IM} \end{bmatrix} \quad (26)$$

con los valores para las constantes de $m=1$, $F=0.1$, $l=0.6$; $g=9.8$; $M=.5$ y con una referencia de 100 metros para el desplazamiento, con la función de mantener vertical al péndulo, es decir en el equilibrio inestable. Para ello se empleó un controlador con observación de estados con las matrices de diseño $Q_{11}=1 \cdot 10^1$, $Q_{22}=1 \cdot 10^3$, $Q_{33}=1 \cdot 10^5$, $Q_{44}=1 \cdot 10^5$ y $Q_{55}=1e^5$ con $R=1 \cdot 10^2$ para el controlador, y para calcular al observador se emplearon $Q_{O11}=1$, $Q_{O22}=1 \cdot 10^3$, $Q_{O33}=1 \cdot 10^5$, $Q_{O44}=1 \cdot 10^2$ con $R_o=1 \cdot 10^{-1}$. Los resultados se muestran en la Fig. 5 para diferentes ángulos iniciales, incluso π que significa que el péndulo estaba en el equilibrio estable y el controlador con observador lo lleva al equilibrio inestable y, además, lo traslada la distancia deseada de 100m desde el origen. La Fig. 6 muestra los planos de fase y la

acumulación de costo de éste sistema, que tiene dos variables observadas.

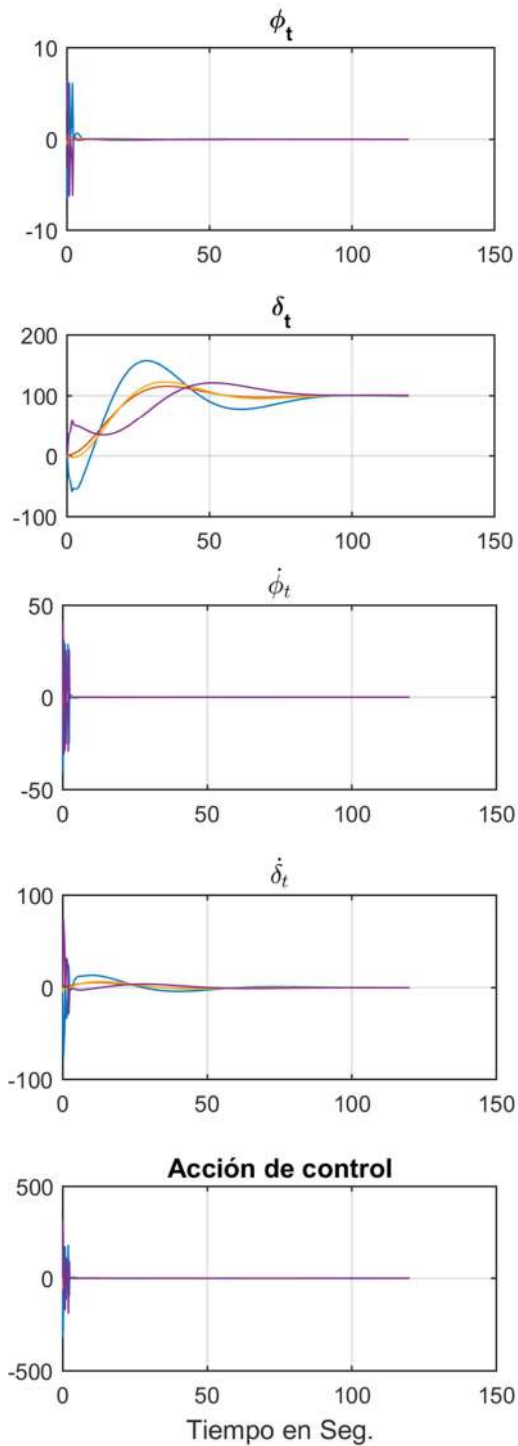


Fig. 5. Evolución de las variables de estado y de la acción de control para el péndulo invertido, partiendo de las condiciones iniciales $\pm\pi$ y $\pm 0,6$.

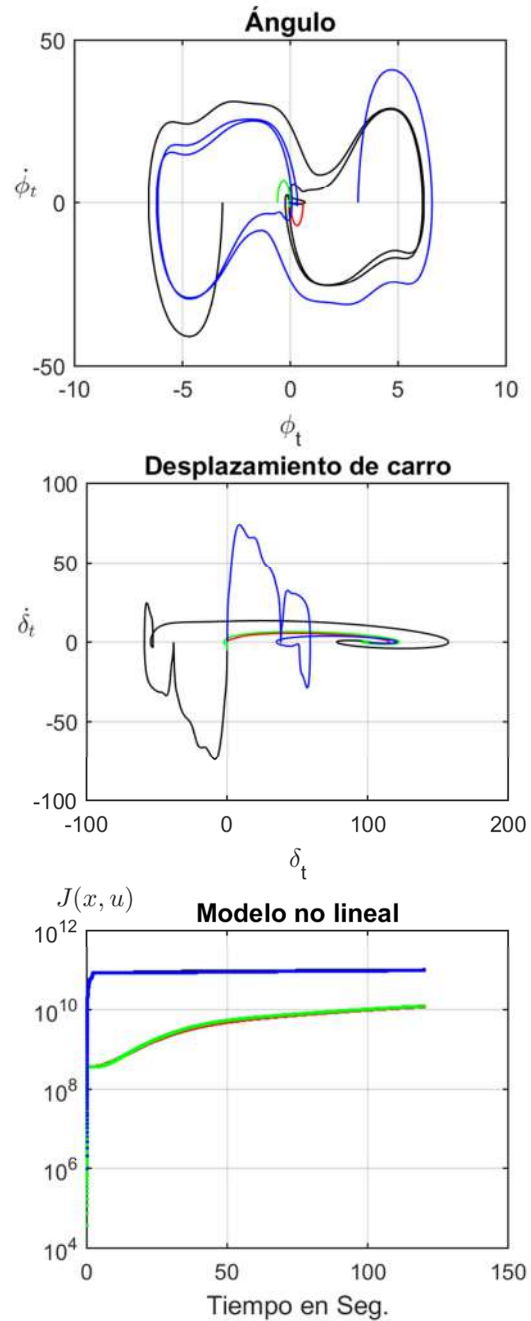


Fig. 6. Evolución de las variables de estado en el plano de fases para el ángulo y para el desplazamiento, del control para el péndulo invertido, partiendo de las condiciones iniciales $\pm\pi$ y $\pm 0,6$. Abajo: evolución de la acumulación de costo.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado el método de diseño de controladores con observación de estado para procesos diversos, entre los que está uno de fase no mínima, uno de motor de corriente continua y un modelo de un sistema no lineal. El método es simple, requiere de práctica para lograr el adecuado desempeño del sistema realimentado completo ya que a medida que se agregan más variables de estado también se agregan más parámetros de diseño. El criterio de ajuste es a prueba y error partiendo de conocer las dinámicas del sistema de lazo abierto, pero el desempeño es aceptable ya que cumple con el objetivo de control y además puede realizarse en un sistema embebido empleando mínimos recursos para su implementación en línea.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Nacional de Catamarca, a la Universidad Nacional de Córdoba, a la Universidad Nacional de San Juan y a la Cardiff Metropolitan University por su apoyo en el desarrollo de proyectos involucrados en el Control y

modelado de procesos de dinámica lenta, media y rápida.

6. REFERENCIAS

- Bertsekas, D., 1995. Dynamic programming and optimal control. Athena Scientific (Eds.) Belmont, Massachusetts.
- Dorf, R. Sistemas de Control Moderno 10ta edición. Pearson Prentice Hall 2005. PM7.4.
- Herrera, M., J. Pucheta, C. Salas, H. D. Patiño and C. Rodríguez Rivero, "A novel LQR Controller Design Method based on the Pontryagin's Maximum Principle," 2021 XIX Workshop on Information Processing and Control (RPIC), 2021, pp. 1-6, doi: 10.1109/RPIC53795.2021.9648447.
- Kirk, Donald, Optimal Control Theory: An introduction. Prentice Hall, 1970.
- Ogata, K. Ingeniería-de-control-moderna-ogata-5ed. Prentice Hall 2010.
- Pucheta, J., Rivero, C., Salas, C., Herrera, M. and Laboret, S. (2017). "Stability Analysis of a Neurocontroller with Kalman Estimator for the Inverted Pendulum Case". *Applied Mathematics*, **8**, 1602-1618. doi: [10.4236/am.2017.811117](https://doi.org/10.4236/am.2017.811117).