Universidad Nacional de Catamarca

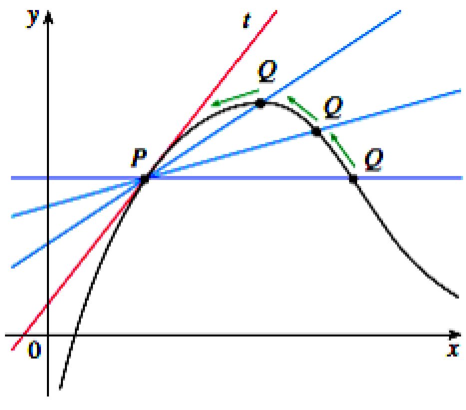
Facultad de Ciencias Agrarias

Carrera de Posgrado

Especialización en Docencia Universitaria de Disciplinas Tecnológicas

TRABAJO FINAL

"Secuencia didáctica del concepto de derivada de una función utilizando software dinámico en el marco de la teoría APOE"



Autora: Lic. Mónica Adriana Argüello
Tutor: Mgter. Ing. Carlos Gabriel Herrera

Año 2021

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mi tutor Mgter. Ing. Carlos Gabriel Herrera quien con sus conocimientos y apoyo incondicional me guío en cada una de las etapas de este trabajo para enriquecer mi formación pedagógica.

También quiero agradecer a todos los docentes de la Especialización en Docencia Universitaria de la Facultad de Ciencias Agrarias por brindarme los saberes, recursos y herramientas que fueron necesarios para llevar a cabo el mencionado trabajo.

Por último, quiero agradecer a mi familia y amigos, por apoyarme durante toda esta etapa la cual resulto un tanto difícil debido a los obstáculos que se presentaron en el desarrollo de mi trabajo el cual fue realizado durante esta inesperada pandemia que nos tocó vivir. Y en especial, a mis padres y mis hijas, que siempre estuvieron ahí brindándome su apoyo y contención para cumplir este nuevo desafío en mi vida profesional.

RESUMEN

El proceso de enseñanza y aprendizaje del Calculo Diferencial en el nivel superior se enfrenta a un problema generalizado ya que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con el concepto de derivada de una función en un punto. Las evidencias mostradas en investigaciones y nuestra experiencia en la Cátedra de Análisis Matemático I correspondiente a las Carreras de Ingenierías de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA reflejan que, al terminar de cursar la asignatura, en general, los estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de estos procedimientos. El objetivo general del presente trabajo es diseñar una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra en el marco de la teoría APOE. Para ello se desarrolló una descomposición genética del concepto en estudio, es decir una hipótesis de las construcciones mentales que el sujeto hace, conforme aprende el concepto matemático, en términos de lo que es observable. Para llevar a cabo la implementación de la propuesta se trabajó en cinco aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje: clases teóricas y prácticas, talleres de resolución de problemas, actividades con GeoGebra y uso del aula virtual de la catedra a través de la plataforma Moodle. Se espera con la implementación de la propuesta didáctica que el alumno logre comprender el concepto derivada de una función en un punto, desde el marco de la teoría APOE utilizando como herramienta de visualización el software dinámico GeoGebra para lograr la coordinación del camino algebraico y el camino gráfico del concepto derivada.

Palabras Claves: DERIVADA, VISUALIZACIÓN, GEOGEBRA, APOE, CALCULO

INDICE

PRÓLOGO

El presente trabajo consiste en una propuesta didáctica en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como recurso didáctico de apoyo el software de geometría dinámico GeoGebra, en el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Dubinsky y Mcdonald, 1991). La misma es planteada para afrontar las dificultades que presentan los alumnos del primer año de las carreras de Ingenieras en la compresión del concepto de derivada de una función en un punto.

En el capítulo 1 se hace referencia a los antecedentes, presentando el aporte de diferentes autores que estudian la problemática en la enseñanza del concepto de derivada de una función y las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del mismo.

En el Capítulo 2 se describe el marco teórico que fundamenta este trabajo, la Teoría APOE, el concepto de Descomposición Genética y la Teoría de la Visualización que son los ejes principales en los cuales se basa el presente trabajo.

En el Capítulo 3 se explica la metodología utilizada en este trabajo.

En el Capítulo 4 se describe al software de geometría dinámico Geogebra presentando sus generalidades, la descripción de las vistas gráfica y algebraica del mencionado software y el diseño de los aplicativos creados para facilitar la visualización de la derivada de una función en un punto.

El Capítulo 5 se refiere a la presentación de la propuesta didáctica de innovación educativa en el cual se describe la fundamentación, la fases de la propuesta didáctica, la identificación del problema, y el diseño de la propuesta de innovación que consiste en: la descomposición genética, el desarrollo de aplicativos matemáticos (Applets) utilizando Software Dinámico Geogebra y las actividades relacionadas con la formación de Ingenieros.

En el Capítulo 6 se menciona la fase de implementación donde se trabaja en cinco aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje: Clases Teóricas, Clases Prácticas, Talleres de Resolución de problemas, actividades con Geogebra y uso del Aula Virtual de la Catedra a través de la plataforma Moodle.

El Capítulo 7 se refiere a la fase de Evaluación, en la cual se describen los criterios, momentos, tipos e instrumentos de evaluación. Una vez presentado el marco teórico se desarrolla la propuesta de evaluación para validar si se logró el objetivo planteado que a través de una secuencia didáctica el alumno logre comprender el concepto derivada de una función en un punto, desde el marco de la teoría APOE y utilizando como herramienta de visualización el software dinámico GeoGebra.

Finalmente se presentan las conclusiones, conjuntamente con posibles líneas futuras de investigación relacionadas con el tema.

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje del Calculo Diferencial en el nivel superior se enfrenta a un problema generalizado ya que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con el concepto de derivada de una función en un punto.

En este sentido diversas investigaciones confirman estas dificultades en la comprensión del concepto en estudiantes ingresantes al nivel universitario, como ser las siguientes:

Urquieta, Carrillo Andrade y Soto Andrade (2014) analizan el aprendizaje del concepto de derivada según el modelo APOE (Acción – Proceso – Objeto – Esquema) y resultados salientes muestran que, si el concepto de derivada en un punto no es comprendido a nivel de Acción, los estudiantes tienen dificultades para extenderlo y transitar a un nivel superior de comprensión e interpretar el concepto geométricamente. En el mismo sentido Amaya, Rojas y Ballen (2009), detectan la tendencia a reducir el concepto de derivada a las operaciones algebraicas en desmedro de lo conceptual. Berry y Nyman (2003) citados por Flores y García (2019), confirman que al comienzo de la actividad los estudiantes demuestran una visión simbólica algebraica del cálculo y les resulta difícil establecer conexiones entre las gráficas de una función derivada y la función misma. Estos trabajos tienen en común el diagnóstico, en diferentes contextos de las dificultades en la comprensión de la derivada, como un concepto matemático más que una serie de secuencias algebraicas.

1. Antecedentes

Respecto a propuestas didácticas para el concepto Derivada de una Función, López Zamudio (2008) elabora una secuencia que involucre al software GeoGebra para el tratamiento del Calculo Diferencial. Córdoba, Ruiz y Rendón (2015) proporcionan el marco para la enseñanza para la comprensión (EpC), llegando a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: gráfica y analítica. Por su parte, Urquieta *et al*. (2014) para indagar el aprendizaje construido usaron el modelo cognitivo APOE propuesto por Dubinsky y McDonald (1991).

En referencia a investigaciones que fueron realizadas en el marco de la teoría APOE, Amaya, Rojas y Ballen (2009) analizaron los niveles de comprensión del concepto derivada, cuyos resultados más importantes muestran una tendencia en alumnos a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función. Por otra parte, se hicieron evidentes las dificultades para transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada.

Urquieta et al. (2014) consideraron el aprendizaje del concepto de derivada según el modelo APOE y resultados salientes mostraron que, si el concepto de derivada en un punto no es comprendido a nivel de Acción, los estudiantes tienen dificultades para extenderlo y transitar a un nivel superior de comprensión e interpretar el concepto geométricamente. Además, tienen dificultades de comprensión cuando deben discriminar entre proposiciones falsas y verdaderas enunciadas sobre propiedades de la derivada relacionadas con la monotonía y la concavidad de una función.

Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) citados por Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Fuentes, Trigueros y Weller (2014), analizaron en base a la teoría APOE la comprensión gráfica del concepto de derivada y consideran que los estudiantes cuyo curso se basó en el análisis teórico del aprendizaje propuesto pueden haber tenido más éxito en el desarrollo de una comprensión gráfica de una función y sus derivadas, que los estudiantes de los cursos tradicionales.

Con respecto a los conceptos vinculados con la derivada como son el límite y la regla de la cadena, Maharaj (2010) participó sobre un estudio que utilizó el marco teórico APOE para investigar la comprensión de los límites de las funciones por parte de los estudiantes universitarios. Los resultados de este estudio confirmaron que el concepto de límite es uno que los estudiantes encuentran difícil de entender, y sugiere que posiblemente sea el resultado de que muchos estudiantes no tengan estructuras mentales apropiadas en los niveles de proceso, objeto y esquema.

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006), citados por Pereyra y Herrera (2020), afirman que la comprensión de la noción de derivada presenta dificultades para los estudiantes. Detectan tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la noción de derivada. El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada. Badillo, Font y Azcárate (2005), presentan y analizan un fenómeno que se observa en los libros de texto colombianos de física de Bachillerato cuando se introduce la velocidad. Dichos textos usan una notación (incremental y diferencial) que pone las bases de un conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la velocidad instantánea como función, en la definición de la velocidad instantánea en un instante t_0. Por una parte, la observación empírica de la confusión que tienen muchos alumnos españoles entre la derivada en un punto y la función derivada dirigió el análisis semiótico hacia dicho fenómeno. Este análisis, además de permitir explicar las causas de dicho fenómeno, puso de manifiesto la magnitud que podía llegar a tener y, de esta manera, orientar investigaciones realizadas en países donde la formación del profesorado y los planes de estudio contemplaban la notación incremental y diferencial como la más habitual en las clases de matemáticas y de física.

Habre y Abboud (2006), analizan la comprensión de la función y su derivada tal como la ven los estudiantes de un curso reformado de Cálculo I ofrecido en dos secciones experimentales en la Universidad Libanesa Americana en Beirut, Líbano. Los resultados han demostrado que el enfoque general adoptado en el curso resultó ser complicado para la mayoría de los estudiantes, pero gratificante para otros. Las entrevistas realizadas con algunos de ellos y un estudio de su desempeño en preguntas de examen muy específicas revelan que para la mayoría de los estudiantes, la representación algebraica de una función aún dominaba su pensamiento; sin embargo, estos mostraron una comprensión casi completa de la derivada, particularmente la idea de la tasa de cambio instantánea y/o la pendiente de una curva en un punto dado. Además, muy pocos de ellos se refirieron a los métodos mecánicos para encontrar derivadas.

Estos antecedentes de dificultades de interpretación de conceptos del cálculo de una variable y en particular el de derivada de una función en un punto o función derivada también son observados en las evaluaciones parciales o finales que se realizan a los alumnos de la Cátedra Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. En el caso particular del concepto de derivada de una función se observan dificultades en situaciones que requieren una dominio conceptual del tema como ser el estudio de funciones, lo que se pudo visualizar en la cohorte 2021 del cursado de la Asignatura, ya que en ejercicios de esta naturaleza que se evaluó en el tercer parcial, el porcentaje de respuestas correctas fue menor que los ejercicios que solo requerían técnicas o reglas de derivación como determinar la derivada de un producto de funciones, cociente de funciones o regla de la cadena.

Es decir, que es necesario trabajar sobre estrategias didácticas que posibiliten además de la resolución algebraica de problemas sobre derivada de una función en un punto, el dominio conceptual del mismo trabajando sobre un entorno gráfico – geométrico a través de software dinámico GeoGebra.

La experiencia en la Cátedra refleja que los estudiantes, al terminar de cursar la asignatura, en general, logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de estos procedimientos. En base a los resultados de las evaluaciones parciales de la Catedra se observaron las dificultades que los alumnos presentan con respecto al concepto de pendiente de la recta tangente en un punto, además en la obtención de la pendiente de la recta tangente aplicando la definición y en encontrar la ecuación de la recta, en otros casos no realizan correctamente la gráfica de la función, es decir los alumnos no coordinan la parte analítica con la gráfica. Incluso no logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales relacionados con la rapidez de la variación de la posición respecto del tiempo, a pesar de que en problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto.

2. Objetivo General

De acuerdo a lo descripto precedentemente se plantea como objetivo de este trabajo:

- ✓ Proponer una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra en el marco de la teoría APOE.

3. Objetivos específicos

- ✓ Proponer una descomposición genética del concepto derivada en el marco de la teoría APOE.
- ✓ Diseñar aplicativos matemáticos (Applets) utilizando software dinámico GeoGebra que permitan la visualización del concepto Derivada de una Función en un punto.
- ✓ Diseñar actividades que permitan aplicar el concepto de Derivada de una Función en un punto a problemas relacionados con la formación de Ingenieros.

CAPITULO 2 MARCO TEÓRICO

2.1 Teoría APOE

Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE (Dubinsky y Mcdonald, 1991) citado por Roa Fuentes y Oktac (2012) toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis, sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen, se pueden emplear para refinarla, a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones de los estudiantes al aprender dicho concepto (Dubinsky y Mcdonald, 1991) citado por Roa Fuentes y Oktac (2012), y también se puede utilizar como una guía, en el diseño de material didáctico.

En ese sentido, el conocimiento matemático de un individuo, es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas, reflexionando sobre ellas y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas, a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996), citado por Sanchez Matamorros, García y Linares (2008). Se mencionan las estructuras mentales denominadas: acción, proceso, objeto y esquema, que constituyen la parte primordial de esta teoría.

Acción. Consiste en la transformación física o mental de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996), citado en Kú, Trigueros y Oktac (2008). Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, empero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo (Asiala, et al., 1996), citado en Kú et al. (2008).
Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala, et al, 1996), citado en Kú et al. (2008).
Esquema. Con respecto al logro del último nivel, se puede afirmar que un esquema para un concepto en matemática, es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática, que tiene relación con ese concepto matemático (Trigueros, 2005). La coherencia, se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática se puede trabajar utilizando el esquema.

2.2 Procesos cognitivos

A continuación se definen en el marco de la Teoría APOE, los mecanismos mentales que se consideran importantes en la construcción y desarrollo conceptual dentro del pensamiento matemático avanzado.
Según (Dubinsky y Mcdonald ,1991) citados por Roa-Fuentes y Oktaç (2012), hay cinco tipos de abstracciones reflexivas que permiten dar lugar a las construcciones mentales descritas anteriormente, las cuales son: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión.
La interiorización se da cuando un individuo repite una serie de acciones que le permiten crear una estructura mental sobre un procedimiento para resolver un problema, sin embargo el individuo no cae en cuenta de dicha estructura, sino que inconscientemente establece una serie de pasos los cuales realiza uno a la vez sin percatarse de estos como un proceso.

Por lo tanto, el proceso de interiorización de acciones en proceso debería convertirse en el puente que permite ir de una primera construcción mental (acción) hacia otra de un nivel más sofisticado (proceso). Ordinariamente, muchas de las actividades que se desarrollan para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos no contemplan el paso de una construcción mental a otra. Es decir, que no están diseñadas teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes, por el contrario se muestran desconectadas entre si y lo que propician es la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar un tipo concreto de ejercicios, pero que no llegan a interiorizarse en procesos.

La coordinación se refiere a la capacidad de establecer relaciones entre dos o más procesos de manera que se pueda generar un nuevo proceso a través de las relaciones lógicas establecidas.

La encapsulación consiste en una reflexión acerca de la serie de acciones y procesos empleados para responder a un problema de manera que se consideran como un todo, es decir, se llega a algo estático.

La desencapsulación es el proceso inverso de la encapsulación e incluye a la generalización y reversión. En este tipo de abstracción se descompone el objeto encapsulado y se cae en cuenta de las acciones y procesos que permitieron comprenderlo como un todo.

Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema ha sido generalizado. Esto puede ocurrir porque el sujeto se da cuenta de la mayor aplicabilidad del esquema. De igual forma, esto también puede ocurrir cuando un proceso es encapsulado en un objeto (Dubinsky y Mcdonald, 1991) citados por Roa-Fuentes y Oktaç (2012).

2.3 Descomposición genética

Esta teoría propone la búsqueda de la reflexión por parte de los individuos a la hora de aprender y comprender los conceptos matemáticos más que la memorización acrítica de técnicas y algoritmos independientemente del grado de sofisticación que tengan estos, Badillo (2003).

La descomposición genética según Badillo (2003), es el eje de la aplicación de la teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen. Además es el punto de partida para la construcción de unidades didácticas.

Asiala et al. (1996) citado por Ku et al. (2008), plantean que la descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente del individuo.

Badillo y Azcárate (2002) señalan que la descomposición genética introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto, que permite, cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto, usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo, orientar el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen.

Gimenez y Machin (2003), citados por Bermúdez (2013), sugieren que para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales,previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser desencapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son las siguientes: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y desencapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

En el estudio que se muestra, la descomposición genética será un pilar fundamental puesto que permitirá hacer un análisis teórico del objeto matemático, y activará la reflexión por parte de los docentes en función de mejorar y orientar su actuación en las aulas de clases desde el punto de vista cognitivo y didáctico.

En un principio, son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula, una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina de modo que explique de mejor manera, la forma en que aprenden los estudiantes cuando trabajan con un concepto matemático. “Es importante aclarar que no existe una descomposición genética única, ya que esta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto”, según afirma Trigueros, (2005, 8). Lo que importa es que cualquier descomposición genética, sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

2.4 Visualización matemática

Duval (1998), como se cita en Soto, Herrera y Pereyra (2019), sostiene que los objetos matemáticos solo son accesibles mediante sus respectivos registros de representación; siendo fundamental en el proceso de aprendizaje que los alumnos logren identificar un objeto matemático a través de ellos y de este modo logren coordinar dichos registros a través de actividades cognitivas de tratamiento y conversión

> *Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes* (Duval, 1998, p75).

A su vez el mismo autor Duval (2002), como se cita en Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012), diferencia visión de visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial, necesita exploración mediante movimientos físicos del sujeto o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto mientras que la visualización es la representación semiótica de un objeto. Permite comprender sinópticamente cualquier organización como una configuración, haciendo visible lo que no es accesible a la visión así como aprehender globalmente cualquier organización de relaciones. La visualización plantea al aprendizaje tres problemas: la discriminación de las características visuales relevantes; el procesamiento figural con cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura, reconfigurar) cambio de perspectiva y coordinación con el registro discursivo.

El uso de información visual en la enseñanza de las matemáticas puede servir de apoyo para mejorar la comprensión de conceptos en estudio, en ese sentido se hace necesario analizar lo que se denomina visualización matemática. Gómez Chacón (2014) elabora un trabajo al respecto, citando diversas definiciones del término como por ejemplo “*La visualización en matemática es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas*” Zimmermann y Cunningham (1991, p3) como se cita en Gallo, Verón y Herrera (2019). En el mismo sentido Duval (2002), como se cita en Godino, et al. (2012) define la visualización como “la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido”.

“Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados” Tall y Vinner (1981, p152), como se cita en Scorzo y Favieri (2019). Otra definición expresa que

> *Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión* Arcavi (2003, p217) citado por Godino, Gonzato, Cajaraville, y Fernández (2012).

Las definiciones citadas enfatizan el concepto de visualización más amplio de lo que se puede percibir por los ojos, poniendo énfasis en que se trata de una representación mental, dándole sentido a los conceptos matemáticos. Es decir, la visualización se puede considerar como una componente fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, que puede ser potenciado con el uso de diferentes tecnologías, como por ejemplo el software GeoGebra, que permite vincular las representaciones algebraicas y geométricas de un objeto matemático favorecido por el carácter dinámico de este software.

CAPÍTULO 3 MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Ámbito de aplicación

La Cátedra de Análisis Matemático I pertenece al Ciclo Básico de las Carreras de Ingenierías en Informática, Agrimensura, Electrónica y Minas de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, tiene una carga horaria semanal de 6 horas Teóricas – Practicas. Los contenidos mínimos de la materia son: Números reales. Funciones reales de una variable real. Límite de funciones reales. Continuidad. Derivación. Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones. Derivación numérica. La diferencial y la antidiferencial. Técnicas de integración. La integral definida. Aplicación de la integral definida. Integración numérica. Formas indeterminadas. Integrales impropias y fórmula de Taylor. Sucesiones y series numéricas reales. Series de potencias.

3.2 Innovación Educativa

Barraza Macías (2013) define la innovación educativa como un proceso que involucra la selección, organización y utilización creativa de elementos vinculados a la gestión institucional, el currículum y/o la enseñanza, siendo normal que una innovación educativa impacte más de un ámbito, ya que suele responder a una necesidad o problema que regularmente requiere una respuesta integral.

Para dar una respuesta integral se debe seguir un modelo centrado en la resolución de problemas, esto implica realizar un conjunto de acciones que necesariamente deben ser desarrolladas de una manera deliberada y sistemática con el objetivo de lograr un cambio duradero que pueda ser considerado como una mejora de la situación previamente existente.

Los ámbitos empíricos donde se concretan las prácticas de innovación educativa serán el de la gestión institucional, el del currículum y el de la enseñanza. En el primer caso se hablaría de innovación institucional, en el segundo de innovación curricular y en el tercero de innovación didáctica. Se hace referencia al tercero, teniendo en cuenta el enfoque del trabajo.

Las prácticas involucradas en la Innovación didáctica, son las siguientes:

- ✓ Prácticas de planeación didáctica: elaboración de registros, construcción de modelos y definición de procesos.
- ✓ Prácticas de intervención didáctica: construcción de estrategias didácticas y medios para la enseñanza.
- ✓ Prácticas de evaluación de los aprendizajes: diseño de instrumentos y construcción de estrategias.

Desde la perspectiva de Huberman (1973) y Havelock y Huberman (1980), citados por Barraza Macías (2013) se pueden distinguir tres modelos procesuales de la innovación educativa:

- ✓ Modelo de investigación y desarrollo
- ✓ Modelo de interacción social
- ✓ Modelo de resolución de problemas.

Las características básicas del enfoque o método de resolución de problemas pueden sintetizarse en los cinco puntos siguientes (Barraza Macías, 2013):

1. El usuario constituye el punto de partida.
2. El diagnóstico precede a la identificación de soluciones.
3. La ayuda del exterior no asume un papel de dirección, sino de asesoría y orientación.
4. Se reconoce la importancia de los recursos internos para la solución de los problemas.
5. Se asume que el cambio más sólido es el que inicia e interioriza el propio usuario.

El proceso de innovación educativa, a partir del modelo de resolución de problemas implica las siguientes fases:

- ✍ La fase de planeación comprende los momentos de elección de la preocupación temática, la construcción del problema generador de la innovación y el diseño de la propuesta de innovación/solución.
- ✍ La fase de implementación comprende los momentos de aplicación de las diferentes actividades que constituyen la propuesta de solución/innovación

y la reformulación y/o adaptación de las diferentes actividades que constituyen la propuesta de solución/innovación.

- La fase de evaluación comprende los momentos de seguimiento de la aplicación de las diferentes actividades que constituyen la propuesta de solución/innovación y la evaluación general de la propuesta.

3.3 Implementación

Las actividades propuestas se desarrollaran en la Cátedra de Análisis Matemático I correspondiente al Primer Año de las carreras de Ingeniería en Electrónica, Agrimensura, Informática y Minas de la Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas.

La labor docente en la enseñanza y aprendizaje presenta algunas dificultades en el proceso, resaltando la instrucción simultánea de muchos alumnos, en el caso de primer año de ingeniería se cuenta con una masa de alumnos de aproximadamente 180 ingresantes y un promedio de 60 alumnos recursantes. Las clases teóricas (no obligatorias) se dictan en un aula con una capacidad de 200 alumnos y las clases prácticas (obligatorias) en comisiones por carreras de aproximadamente 80 alumnos promedio en conjunto con los recursantes, las clases anteriormente mencionadas se describen en un contexto de presencialidad, es decir en un contexto de clases normales no de pandemia.

Las clases teóricas (4 horas semanales) se desarrollan no solo con la presentación de los temas curriculares netamente, sino en conjunto con ejemplos prácticos, esto no solo estimula y facilita el uso de múltiples formas de conocimiento sino que hace evidente que no siempre existe una única solución correcta aunque todos los caminos conducen a la misma conclusión. En las clases prácticas (2 horas semanales) se evidencia el trabajo en grupo, lo que promueve el tipo de actividades colaborativas, estimula el intercambio, el debate y los trabajos conjuntos entre los alumnos como fuente de conocimiento donde el profesor es parte del mismo y es quien guía este proceso.

Para llevar a cabo la implementación de la propuesta se formulan las siguientes actividades:

- Rediseñar guías de trabajos prácticos con problemas de aplicación a la Ingeniería donde se aplique el concepto de derivada de una función.

- Proponer actividades con Geogebra para visualizar el concepto de derivada.
- Desarrollar actividades de autoevaluación en el aula virtual utilizando la plataforma Moodle.
- Implementar Talleres Teórico - Prácticos.

En esta fase de implementación se trabajará en cinco aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje.

3.4 Método de resolución de problemas

El método que se utiliza en el desarrollo de esta propuesta es el Método de Solución de problemas:

Se aplica cuando los alumnos se enfrentan con éstos, los cuales generan preguntas, o incertidumbre. Entonces, es necesario analizar y comprender el problema, a partir del cual se podrían tomar decisiones para resolverlo, o al menos, para disminuir la incertidumbre que el mismo genera. Aprender resolviendo problemas es un proceso que acompaña a las personas a lo largo de toda la vida, avanzando de manera creciente desde lo simple a lo complejo, hasta la toma de decisiones y la resolución del mismo. Esto permite desarrollar la capacidad crítica, la inventiva y el sentido práctico, integrando distintos conocimientos y experiencias previas, tal vez aprendidas en diferentes momentos y en diversos lugares, e incluso buscar nuevas informaciones para entender y resolver el problema.

Una situación problemática exige un primer trabajo de delimitación del problema y puede incluir la recolección, clasificación y crítica de datos o el manejo de ciertos datos dados. En este caso resulta más valioso si, en la mayor medida posible, dicha situación tiene relación con alguna práctica o situación laboral futura.

Se considera a la situación problemática como un recurso a partir del cual el trabajo de la clase se organiza en torno a: (Steiman, 2018)

- contextualizarse en un recorte de la realidad que le da sentido;
- poner en juego varios procedimientos rutinarios y/o procedimientos nuevos;
- manejar datos que pueden exigir o no un trabajo previo de búsqueda, selección, clasificación y/o critica de ellos;

- elaborar algún tipo de hipótesis que oriente la búsqueda de la o las soluciones;
- tomar decisiones;
- obtener soluciones únicas o admitir varias soluciones posibles.

Las situaciones problemáticas se presentan como recursos disparadores de la clase, esto es para contextualizar un contenido dentro de una situación problema que le dé sentido antes de analizar sus categorías conceptuales. Además se utilizan como un recurso para poner en situación contextual y en un trabajo básicamente analítico los contenidos y también para cerrar una clase dejando abierto el desafío de problematizar el contenido.

El ingeniero debe abocarse a proponer respuestas a los problemas y a las necesidades que se enfrenta en las nuevas condiciones en que se vive, por lo que requiere movilizar toda la experiencia acumulada, los saberes de los distintos dominios de conocimiento, de las capacidades de acción, de interacción, para generar un modelo que integre saberes, acciones de interacción social y de autoconocimiento, desde una perspectiva integral y dinámica.

La resolución de problemas implica la capacidad de identificar y analizar situaciones problemáticas cuyo método de solución no resulta obvio de manera inmediata. Incluye también la disposición a involucrarse en dichas situaciones con el fin de lograr su pleno potencial como seres constructivos y reflexivos.

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy preciada en muchos aspectos de nuestras vidas y es sin duda, una parte importante del Cálculo Diferencial e Integral.

CAPITULO 4: SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICO GEOGEBRA

4.1 Generalidades

GeoGebra es un software libre que permite la construcción y manipulación de construcciones geométricas en el plano como en el espacio. En pantalla se pueden observar simultáneamente diferentes ventanas que corresponden a la vista geométrica, la vista algebraica y también se puede anexar una planilla de cálculos. Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, segmentos, vectores, permitiendo también el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas e integrales. El carácter dinámico de este aplicativo permite modificar parámetros y observar los respectivos resultados de ello tanto en la vista geométrica como algebraica.

El software de matemáticas dinámicas de código abierto y multiplataforma GeoGebra (Hohenwarter, Preiner y Yi, 2007) trata de combinar la facilidad del uso del software de geometría dinámica con la versátil posibilidad de los sistemas de álgebra computacional. La idea básica del software es articular la geometría, el álgebra, y el cálculo, en un único paquete fácil de usar para aprender y enseñar matemáticas desde la primaria hasta la universidad.

GeoGebra puede ayudar a los estudiantes a captar el aprendizaje experimental, orientado a problemas y orientado a la investigación de matemáticas, tanto en el aula como en el hogar. Los estudiantes pueden utilizar simultáneamente un Sistema de Algebra Computacional (CAS) y un Sistema de Geometría Dinámica (DGS), al hacer esto, pueden aumentar sus habilidades cognitivas de la mejor manera.

Sari, Hadiyan y Antari (2018) explican cómo se puede utilizar GeoGebra en un curso de cálculo diferencial para explorar los conceptos de las derivadas, proporcionando visualizaciones dinámicas del concepto. Los resultados muestran que la característica dinámica de GeoGebra ofrece la posibilidad de hacer zoom en un gráfico, lo que corresponde a tomar infinitesimal cuando una línea secante se transforma en una línea tangente. Esto construye una base para la comprensión de la definición de la derivada intuitivamente.

Londoño, Mederos y Decena (2018) hacen referencia a la realización de gráfica de funciones, estudio del criterio de la primera y segunda derivada para hallar puntos críticos. Este proyecto se realizó usando la tecnología computacional, específicamente con el software GeoGebra. Para la propuesta se diseñaron hojas de trabajo en las cuales los alumnos interactuaban simultáneamente con ellas y con el software, responden preguntas, analizan los resultados que obtienen para establecer una conjetura respecto a los conceptos mediante la visualización de máximos y mínimos de una función, y posteriormente los alumnos logren interpretar geométricamente la derivada.

Córdoba, Ruiz y Rendón (2015) en su investigación buscan mejorar la comprensión del concepto de derivada mediante una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, para optimizar la integración de los conceptos matemáticos interactuando con el software GeoGebra. La relación existente entre la derivada como un límite y la tasa de variación media, permitirá la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y su posterior generalización.

Gonçalves y Reis (2013) abordaron el concepto Aplicaciones de la Derivada, a través de actividades de investigación con el software GeoGebra y el uso de las tecnologías en la enseñanza, combinado con actividades de investigación. Para esto, elaboró una secuencia de cuatro actividades, estructuradas de la teoría de Duval de los registros de representación semiótica. Según este marco, es importante que el profesor proponga actividades en las que el alumno usa las diversas formas de representación de objetos matemáticos y saben cómo convertir distintos registros semióticos de representación de un objeto matemático. Por lo tanto, si el estudiante tiene dominio de las diversas formas de representación de un objeto matemático, puede elegir el más adecuado para la resolución de un problema propuesto. En este sentido, se considera la importancia de estudiar el concepto de derivada no solo el algebraico, sino también el geométrico.

4.2 Descripción de las vistas gráfica y algebraica de Geogebra

La característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (Geometría) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra). De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas. Todos los objetos que se incorporan en la zona gráfica le corresponderán una expresión en la ventana algebraica y viceversa. (Ver Figura 1).

A continuación se describen las dos presentaciones de cada objeto matemático en su vista algebraica y su vista gráfica:

En la vista gráfica pueden realizarse construcciones geométricas, empleando las herramientas de construcción disponibles en la barra de herramientas. Todo objeto creado en la vista gráfica, tiene también su correspondiente representación en la vista algebraica.

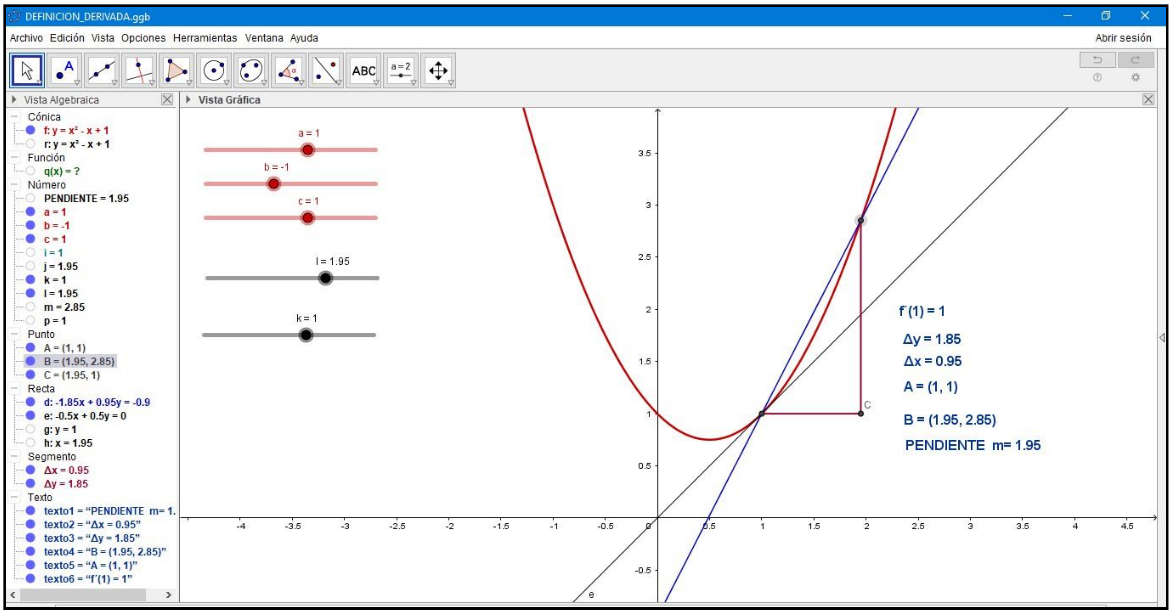


Figura 1: Vista algebraica y geométrica de GeoGebra

Desde la barra de estado de Geogebra pueden ingresarse directamente expresiones algebraicas, que aparece en la *Vista Algebraica* y, automáticamente, su representación en la Vista Gráfica. Por ejemplo, al ingresar $f(x) = x^2$ aparece la función cuadrática en la vista algebraica y el gráfico de la parábola en la vista gráfica.

En la vista algebraica, se distinguen los objetos matemáticos libres de los dependientes. Es libre todo nuevo objeto creado sin emplear ninguno de los ya existentes, y recíprocamente, será dependiente, el que deriva de alguno previo. En ese sentido Dikovic (2009) afirma:

> *La visualización que es posible con el software dinámico Geogebra permite al estudiante ver y explorar relaciones y conceptos matemáticos que fueron difícil de "mostrar" antes de la tecnología. El objetivo de usar GeoGebra es proporcionar un entorno para la exploración activa de estructuras matemáticas a través de múltiples representaciones, o para mostrar a los estudiantes algunos aspectos de las matemáticas que no son posibles con lápiz y papel*. (p 193)

4.2 Descripción de los aplicativos diseñados

4.2.1 Derivada de una función en un punto con Geogebra

Se describen en este capítulo dos aplicativos de elaboración propia de la derivada de una función en un punto los cuales se diseñaron con el objetivo de facilitar la comprensión del concepto a través de la visualización que permite el software dinámico Geogebra. Estos aplicativos de elaboración propia se denominan APPLETS.

Este aplicativo dinámico (Figura 2) permite mediante los deslizadores de color rojo modificar los coeficientes a, b y c de la función cuadrática y los deslizadores negros corresponden a los puntos i, k que son los que definen la recta secante a la gráfica de la función. Se puede observar en la pantalla los coeficientes Δy y Δx; cuando el coeficiente Δx tiende a cero (se desplaza el punto k hacia el punto i para obtener la recta tangente a la curva en i como el límite de la recta secante que pasa por los puntos i, k) y así el valor de la pendiente de la recta secante se acerca a $f'(k)$, es decir a la derivada de la función en un punto. Con este aplicativo se puede observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente cuando el punto k se aproxima a i, con lo cual el alumno puede visualizar el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto. (Figura 2). Este applet busca lograr en el alumno la interpretación del concepto de derivada de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto como el límite del cociente incremental $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero.

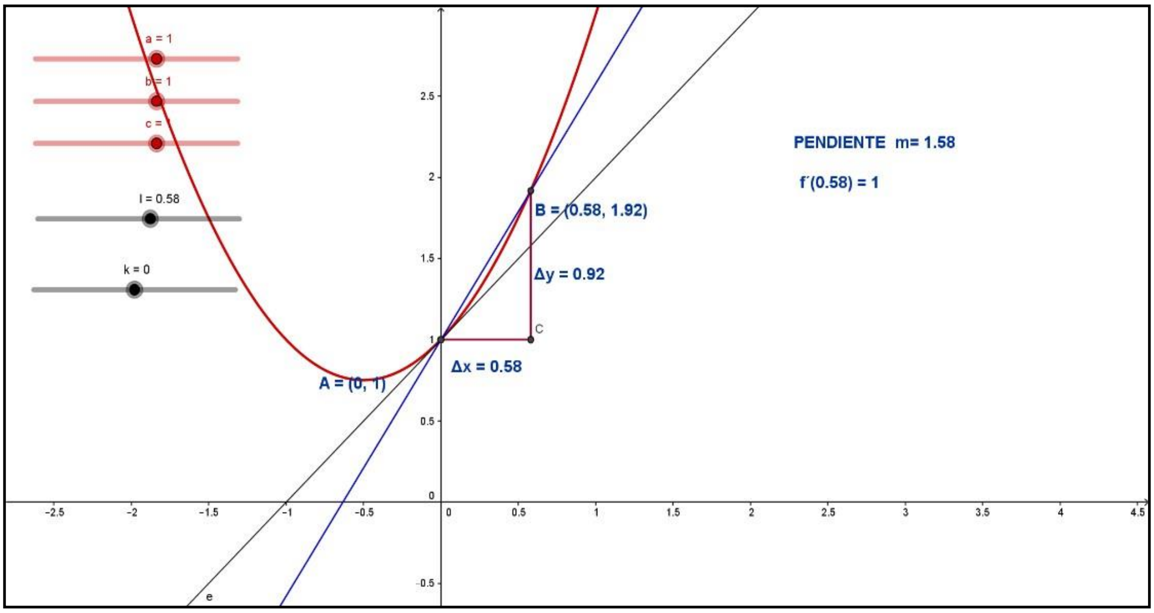


Figura 2: Vista Geométrica de Geogebra del concepto Derivada de una Función en un punto. Fuente: elaboración propia.

4.2.1 Comportamiento de una función y su derivada con Geogebra

El segundo aplicativo diseñado permite visualizar una función cúbica y su función derivada, los puntos críticos de la función, los intervalos donde la función es creciente, donde la función es decreciente.

Los deslizadores en azul a, b, c y d describen una función cúbica, y el deslizador que corresponde al valor de k representa la abscisa del punto donde se quiere encontrar la recta tangente, este deslizador es dinámico ya que a medida que el valor de k se mueve la recta tangente varía en cada punto de la gráfica de la función. En la parte inferior se observan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función cubica, de acuerdo al signo de la derivada. La visualización dinámica de la recta tangente permite identificar los puntos donde la derivada es positiva, donde la derivada es negativa y donde la derivada es nula. (Figura 3)

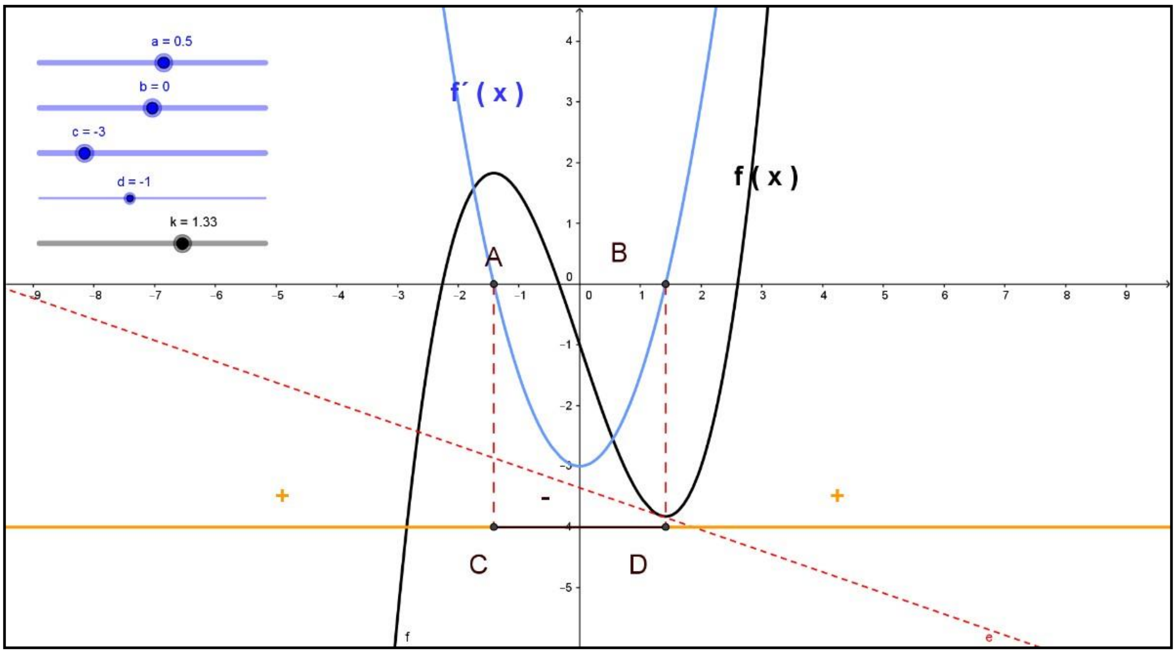


Figura 3: Vista Geométrica de Geogebra sobre el comportamiento de una Función y su Derivada. Fuente: elaboración propia

De esa manera a través de una secuencia de tareas que el alumno debe realizar, se puede determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ de acuerdo al signo de la derivada, asimismo se pueden determinar gráficamente los puntos donde la derivada $f´(x)$ es nula, en correspondencia con los puntos críticos de la función $f(x)$.

CAPITULO 5 PROPUESTA DIDÁCTICA DE INNOVACIÓN EDUCATIVA

Fase de Planeación

5.1 Identificación del problema

El problema consiste en la interpretación del concepto de derivada. Las dificultades que se observan con respecto al concepto de pendiente de la recta tangente en un punto muestran que algunos alumnos encuentran la pendiente de la recta tangente aplicando la definición y su ecuación, pero no realizan correctamente la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado; y en otros casos determinan correctamente la pendiente de la recta tangente pero no obtienen la ecuación de la recta, ya que no advierten que dado el valor de $x = a$ pueden encontrar $f(a)$ para determinar la ecuación de la recta; en otros casos no determinan correctamente la pendiente de la recta tangente aplicando la definición.

Se observa una falta de coordinación entre los caminos algebraico y gráfico de la definición de derivada de una función en un punto, de acuerdo a la descomposición genética que se describe en este capítulo.

Con respecto al concepto de derivabilidad de una función en un punto los alumnos logran identificar los valores donde no es derivable la función pero no justifican correctamente su respuesta y en otros casos no reconocen todos los puntos donde la función no es derivable. Sobre el concepto de velocidad y aceleración los alumnos encuentran algebraicamente la función velocidad y aceleración aplicando el concepto de primera y segunda derivada respectivamente pero comenten errores de cálculo al reemplazar el valor de t en la función dada. Con respecto a las técnicas de derivación se observa que presentan mayores dificultades en la aplicación de la Regla de la cadena, que en resolver la derivada de un cociente aplicando las reglas de derivación, los alumnos logran seguir pasos algebraicos para resolver una regla de derivación, pero se observaron dificultades en la resolución de la derivada de una función compuesta, donde debe advertir la aplicación de la Regla de la cadena que requiere de la asociación de conceptos.

5.2 Diseño de la propuesta de innovación

La propuesta de innovación consiste en formular una secuencia didáctica del concepto derivada de una función en un punto, utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra en el marco de la teoría APOE. Para llevar a cabo esta propuesta se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Proponer una descomposición genética del concepto derivada en el marco de la teoría APOE.
- Desarrollar aplicativos matemáticos (Applets) utilizando software dinámico GeoGebra que permitan la visualización del concepto derivada de una función en un punto.
- Desarrollar actividades, acordes con la formación de ingenieros, que permitan aplicar el concepto de derivada de una función en un punto.
- Elaborar una secuencia didáctica del concepto de derivada de una función en un punto.

Descomposición genética

En este trabajo se consideran como referencias las descomposiciones genéticas de Badillo (2003), Asiala et al. (1996), citados por Gutierrez y Valdivé (2012) que sugieren que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada. También se tuvo en cuenta el trabajo de Gutiérrez et al. (2012)

1. a) ***Acción*** de trazar la recta secante de una curva que pasa por dos puntos P y Q.

1. b) ***Acción*** de obtener analíticamente la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos.

2. a*)* ***Interiorización*** de la acción 1. a) en un proceso, de trazar la recta secante a una curva que pasa por dos puntos P y Q, que se convierte en recta tangente cuando Q se aproxima a P.

2.) ***Interiorización*** de la acción 1. b) en un proceso, obteniendo analíticamente la pendiente de la recta tangente a través del cálculo del límite del cociente incremental.

3. ***Coordinación*** de los procesos 2. a) y 2. b) para obtener la derivada de una función en un punto. Este proceso lleva implícito el concepto de límite de una función en un punto.

4. ***Encapsulado*** de 3. en un objeto para interpretar la derivada de una función en punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

5. **Coordinación** de los procesos 2. a) y 2. b) en varias situaciones relacionadas con la derivada de una función en un punto, presentadas en diferentes contextos.

6. **Interiorización** de la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada, la cual toma como entrada el punto y produce en la salida el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier punto del dominio, si el límite existe.

7. **Encapsulación** del proceso del punto 6. para producir la función derivada como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto).

Desarrollo de aplicativos matemáticos (applets) utilizando software dinámico geogebra

Se desarrollaron dos aplicativos matemáticos utilizando software dinámico Geogebra los cuales permiten a través de su vista gráfica y algebraica la visualización del concepto de derivada de una función en un punto.

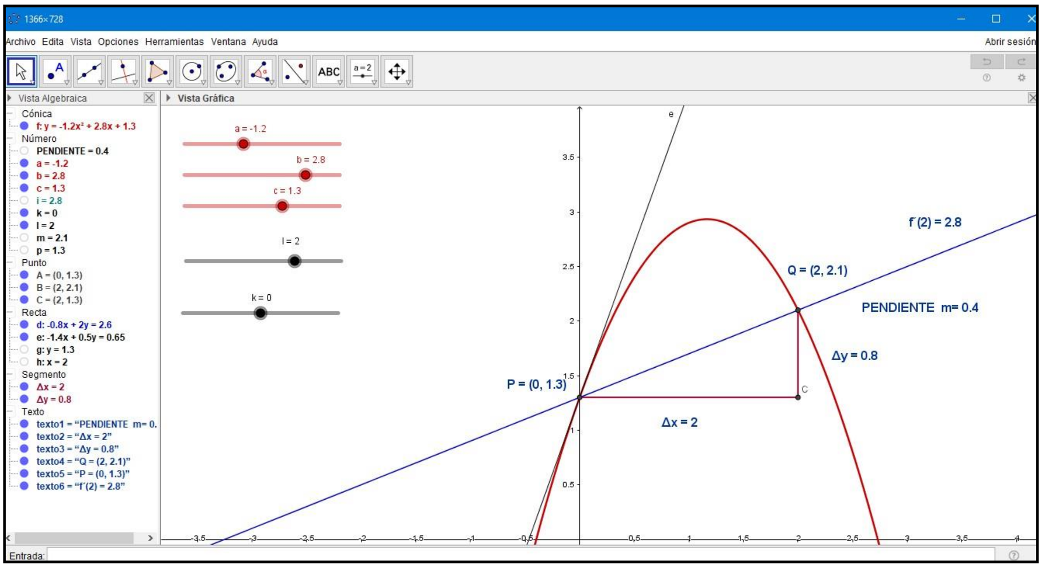


Figura 1. Vista gráfica y algebraica del software Geogebra. Fuente: elaboración propia.

El primer aplicativo permite visualizar la derivada de una función desde el punto de vista analítico como el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, en la vista gráfica se puede observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente cuando el punto k se aproxima a i, de esta manera el alumno puede visualizar el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto.

A continuación, se muestra la secuencia del primer aplicativo:

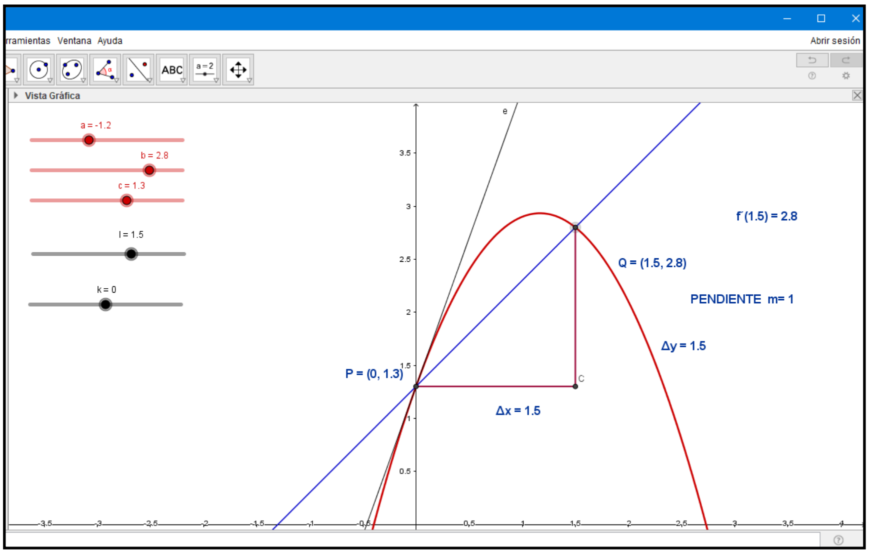


Figura 2. Vista gráfica Secuencia del Primer Aplicativo – Captura 1.
Fuente: elaboración propia.

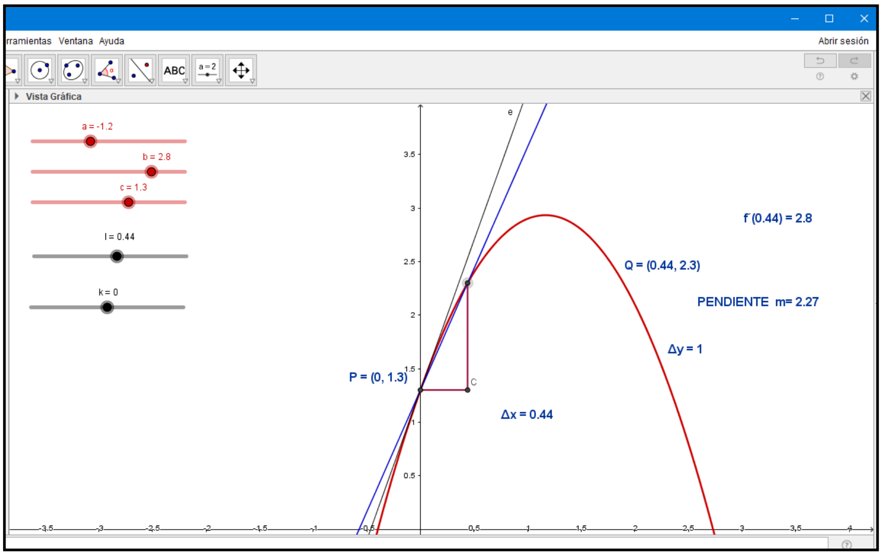


Figura 3. Vista gráfica Secuencia del Primer Aplicativo - Captura 2.
Fuente: elaboración propia.

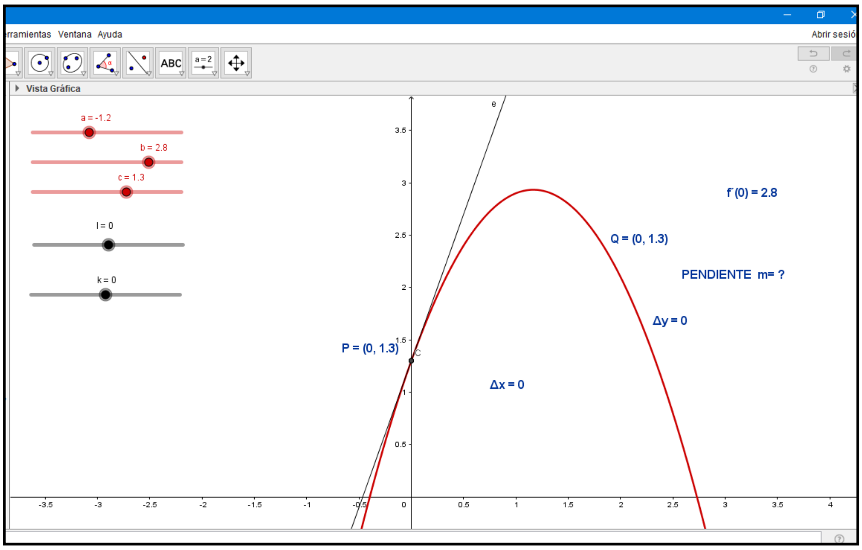


Figura 4. Vista gráfica Secuencia del Primer Aplicativo - Captura 3.
Fuente: elaboración propia.

Lo que se logra con el aplicativo de Geogebra es que el alumno interiorice el concepto de derivada como el límite del cociente incremental y el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto, coordinando los caminos analítico y gráfico para comprender el concepto de la derivada de la función en un punto de acuerdo con la Teoría APOE.

Camino analítico: en el nivel acción el alumno interioriza la definición de límite del cociente incremental cuando observa como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a cero, para transformarlo en un proceso.

Camino gráfico: en el nivel acción el alumno interioriza el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto al visualizar la recta secante que pasa por dos puntos y a medida que el punto k se aproxima a i, se transforma en recta tangente para transformarlo en proceso.

Cuando el alumno logra la *coordinación* del camino analítico con el camino grafico interpreta y comprende el concepto de derivada de una función en un punto, es decir se trasforma en proceso.

El siguiente esquema muestra lo descripto anteriormente:

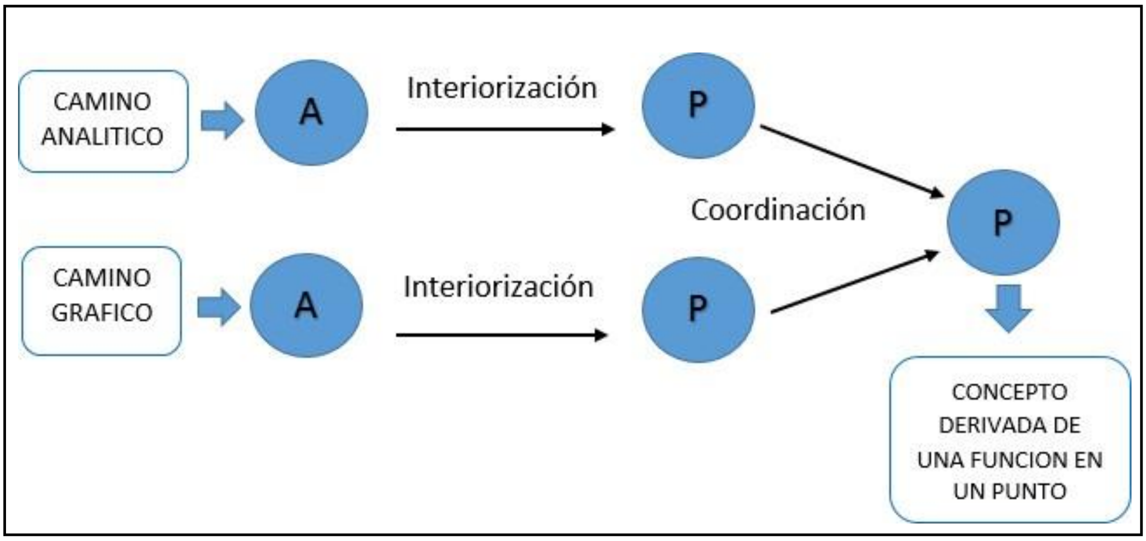


Figura 5. Coordinación de los caminos analíticos y gráficos se acuerdo a la teoría APOE. Fuente: elaboración propia.

El segundo aplicativo permite visualizar una función cúbica y su función derivada, los puntos críticos de la función, los intervalos donde la función es creciente, donde la función es decreciente y el deslizador que corresponde al valor de K representa la tangente en cualquier punto, el cual es dinámico ya que a medida que el deslizador k se mueve la recta tangente varía en cada punto de la gráfica de la función. En figura 5 se muestra la vista gráfica y algebraica del segundo aplicativo. A continuación, se muestra el segundo aplicativo:

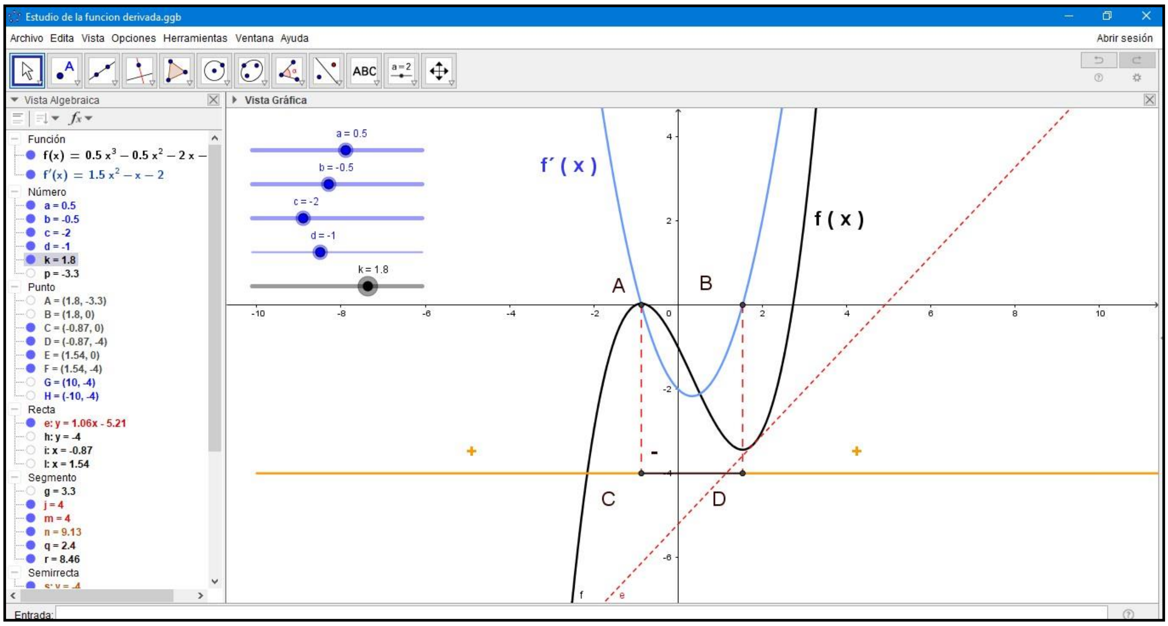


Figura 6: Vista gráfica y algebraica del Segundo Aplicativo. Fuente: elaboración propia.

El segundo aplicativo permite visualizar para cualquier función cubica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función simultáneamente con el grafico de la función derivada, lo que permite visualizar los máximos y mínimos de $f(x)$.

Desde el marco de la teoría APOE el segundo aplicativo permite que el alumno visualice la función derivada $f'(x)$ simultáneamente con la pendiente de la recta tangente en un punto 'a' del dominio de dicha función, es decir que reconozca $f'(a)$ y de esta manera interiorice en un proceso el concepto de la función derivada, que permite calcular la pendiente de la recta tangente para todo punto del dominio de la función.

A su vez para que el alumno logre encapsular en un objeto el concepto de función derivada, el alumno utilizando $f'(x)$ puede determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ los que a su vez conlleva a determinar los puntos críticos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión. En esta etapa el alumno ha encapsulado como un objeto el concepto de función derivada.

El siguiente esquema muestra lo descripto anteriormente:

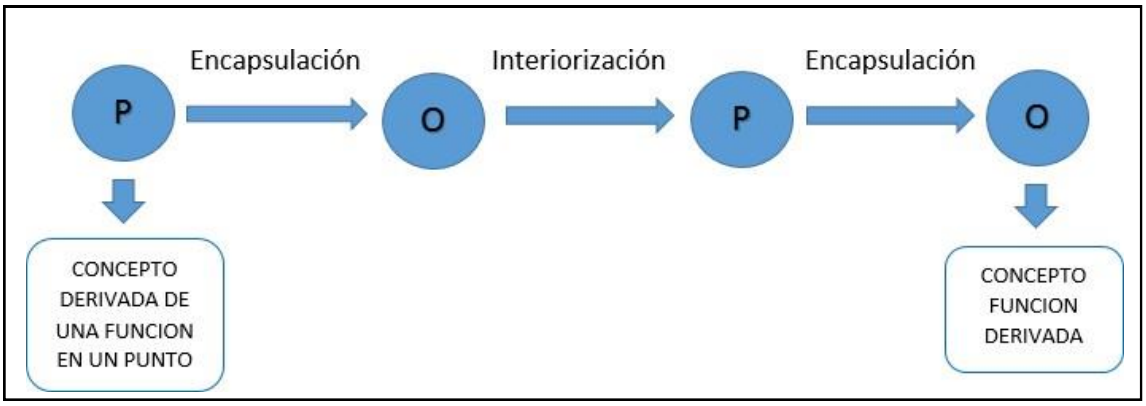


Figura 7: Encapsulación del concepto de función derivada según teoría APOE.
Fuente: elaboración propia.

Actividades relacionadas con la formación de ingenieros

La actividad propuesta está realizada interdisciplinariamente para las cátedras de Análisis Matemático I y Física I y está pensada teniendo en cuenta la interrelación entre los contenidos comunes, las actividades prácticas, participación de los alumnos, el tiempo y objetivos de cada materia. En coincidencia con Davini (2008), que expresa que es preciso pensarla y elaborarla no solo, en torno a los contenidos de tipo conceptual que conforman y distinguen a una disciplina, sino también teniendo en cuenta los diferentes componentes que se articulan al interior de la misma, procurando hacerlos explícitos a la hora de enseñar. Puesto que, el conocimiento de las estructuras sustantivas de las disciplinas es fundamental para saber qué problemas se pueden afrontar a la hora de enseñar, a la vez, trabajar a partir de los diferentes componentes que conforman una disciplina que permitirá realizar, desde el punto de vista curricular, articulaciones entre las disciplinas que constituyen los diferentes campos de formación que conforman la propuesta curricular de la formación del ingeniero y tratar de superar la segmentación característica de la misma.

La Derivada, es un concepto fundamental en el cálculo y rescatando lo que señala Kleiner (2001): "*La invención (descubrimiento) es uno de los mayores logros intelectuales de la civilización.... De hecho, las matemáticas cómo nosotros las comprendemos hoy día serían inconcebibles sin las ideas del cálculo*", indica que es necesario para llegar a la comprensión de la definición de derivada recorrer un largo camino, que comienza en la Grecia clásica (con los primeros problemas de tangentes y cálculo de áreas) y termina en el siglo XIX cuando se formula el concepto en forma de límite con la definición épsilon-delta, luego hasta Newton y Leibniz no se considera realmente el comienzo del cálculo.

Desde el punto de vista físico una derivada es un cociente entre dos cantidades muy pequeñas. Por tanto, no basta con conocer el valor de la función en un punto. Se necesita conocer cómo varía entre ese punto y uno vecino.

Se pretende con esta propuesta que los alumnos logren desarrollar una comprensión relacional porque no sólo se busca estudiantes con conocimiento sobre qué hacer y cómo hacerlo sino que puedan también explicar lo que están

haciendo y por qué" (Berry y Nyman 2003). Esto permitiría que puedan aplicar los conceptos adquiridos a nuevas situaciones, es decir, generalizar el concepto.
Con este problema se pretende mostrar la manera en que se reconoce, se percibe e interpreta el concepto de derivada y el cambio en diferentes contextos, así como se modela, sintetiza y representa.
El motivo por el cual se escogió este ejemplo en particular es debido a que los estudiantes suelen analizar cada espacio como compartimentos estancos, es decir sin relaciones entre ellos, cuando en realidad por citar un ejemplo, la física se nutre para enunciar sus leyes de conceptos matemáticos, especialmente del cálculo diferencial e integral. Sin embargo, un análisis más elaborado muestra que profundizar en la comprensión del movimiento,involucra el desarrollo de algunos de los pensamientos matemáticos mencionados.

Desde el Análisis Matemático:

Sea la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$

a) Indique la pendiente de la recta secante a la función en los puntos del dominio $x = 1$, $x = 3$
b) Indique la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 1$
c) Indique la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 1$

Desde la Física

Sea un móvil que se desplaza con MRUV, en la que su posición en funcióndel tiempo x (t) está determinada por la ecuación $x(t) = -1m + 2m/s\ t + 1m/s^2\ t^2$ siendo t el tiempo en segundos t (s). Determinar:

a) La velocidad media en el intervalo t=4 s y t= 8 s.
b) La velocidad instantánea en los instantes t=4 s, t=6 s
c) Posición del móvil en el instante t=4 s.

CAPITULO 6 FASE DE IMPLEMENTACIÓN

6.1 Clases teórico - prácticas

Se implementarán las clases Teórico - Prácticas en las cuales no solo se desarrollara la presentación de las unidades curriculares, sino en forma conjunta con ejemplos prácticos, con el objetivo de coordinar simultáneamente lo conceptual con la práctica y de esta manera estimular y facilitar la comprensión de los conceptos, especialmente el de derivada de una función en un punto, ya que se observaron las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión de él mismo, dado que logran mecanizar los algoritmos para resolver derivadas pero no llegan a comprender su concepto. El objetivo es trabajar simultáneamente con ejercicios guiados en las clases Teóricas - Prácticas, siguiendo el marco de la teoría APOE y utilizando el software dinámico Geogebra para la visualización a través de apletts lo cual facilitará la comprensión y a su vez la visualización de este concepto fundamental del cálculo Diferencial.

6.2 Clases prácticas

Para llevar a cabo la implementación de las nuevas guías de Trabajos Prácticos se diseñan actividades donde el alumno aplicará el concepto de derivada de una función en el marco de la teoría APOE, siguiendo mediante las actividades propuestas los caminos gráfico y analítico para lograr la coordinación de estas acciones y así encapsular en un objeto el concepto de derivada de una función en punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Las actividades propuestas se desarrollarán con diferentes grados de dificultad de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, para que el alumno logre primeramente el encapsulamiento del concepto derivada de una función en un punto y seguidamente interiorizar y encapsular el concepto de función derivada.

Se proponen conjuntamente actividades con problemas de aplicación a la Ingeniería que involucren el concepto de derivada de una función en punto.

Las actividades propuestas se realizarán en forma simultánea con la utilización del software dinámico Geogebra lo cual permitirá al alumno la visualización en secuencia para llegar a la construcción del concepto de derivada de una función en un punto en el marco de la teoría APOE Las actividades 1 y 2 con Geogebra son de carácter obligatorio y complementaria con los trabajos prácticos.

En el Cuadro 1 se detallan las actividades propuestas en el marco de la teoría APOE:

Cuadro 1: Actividades prácticas a desarrollar por alumnos.

CAMINO ANALITICO	CAMINO GRAFICO	ACTIVIDAD PROPUESTA	ACTIVIDAD CON GEOGEBRA
1) a) Acción de obtener analíticamente la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos.	***1) b) Acción*** de trazar la recta secante de una curva que pasa por dos puntos P Y Q.	1) Determinar la ecuación de la recta secante a la curva que pasa dos puntos. Realizar la gráfica de la recta secante a la curva.	
2) a) **Interiorización de la acción** 1 a) en un proceso, obteniendo analíticamente la pendiente de la recta tangente a través del cálculo del límite del cociente incremental.	2) b) **Interiorización de la acción** 1 b) en un proceso, de trazar la recta secante a una curva que pasa por dos puntos P y Q, que se convierte en recta tangente cuando Q se aproxima a P.	2) Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva que pasa por un punto, utilizando la definición. Graficar la ecuación de la recta tangente. Mostrar en un mismo grafico la recta secante y la recta tangente a la gráfica de la función.	
3) ***Coordinación*** de los procesos 2 a) y 2b) para obtener la derivada de una función en un punto.		3) Encontrar la derivada de la función aplicando la definición y luego calcular la derivada en un determinado punto.	Actividad 1 con Geogebra.
4) **Encapsulado** de 3) en un objeto para interpretar la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.		4) Comparar el resultado obtenido en la actividad 2y 3.	Actividad 1 con Geogebra.
5) **Interiorización** de la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada , la cual toma como entrada el punto y produce en la salida el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier punto del dominio de la función, si el límite existe.		5) Ejercicios para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, máximos y mínimos utilizando el criterio de la primera derivada.	Actividad 2 con Geogebra.
6) **Encapsulación** del proceso del punto 5 para producir la función derivada como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto).			Actividad 2 con Geogebra.

6.3 Talleres de resolución de problemas

A continuación se detalla la Propuesta del Taller denominado: La construcción del concepto de derivada en el marco de la Teoría APOE.

Presentación

El tema del Taller corresponde a la Unidad Nº 5: Derivada de una función, correspondiente al Programa Analítico de la Cátedra de Análisis Matemático I, dirigido a los alumnos de Primer Año de las Carreras de Ingenierías de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA. El dictado del Taller estará a cargo de los docentes de la Catedra, en el que se proponen 3 encuentros para el desarrollo de los temas, con una duración de 2 horas cada encuentro y una cantidad de 20 alumnos participantes.

Fundamentación

A partir de las dificultades que se observan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial sobre la construcción del concepto de derivada, se considera necesario caracterizar diferentes niveles de comprensión, a partir de distintos tipos de tareas propuestas a los estudiantes, con el propósito de modificar, los procesos de instrucción en favor de la comprensión de dicho concepto; este taller pretende la identificación de diferentes niveles de comprensión de la derivada.

Objetivos

El Taller tiene como objetivo general analizar como los alumnos logran comprender el concepto de la derivada desde el punto de vista de la teoría APOE.

Contenidos

Conceptos previos: Funciones, límites, recta secante, recta tangente, pendiente de una recta. Concepto de derivada. Aplicaciones de la derivada de una función. Recta tangente de una función en un punto velocidad media y velocidad instantánea. Tasa de variación.

Estrategias

Realizar actividades vinculadas a los contenidos asociados a la descomposición genética del concepto de derivada, formando grupos de trabajo para el aprendizaje colaborativo.

Resolver problemas donde se aplique el concepto de derivada a situaciones de la vida cotidiana.

Utilizar Recursos de Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) para la visualización dinámica de gráficas. (Geogebra)

Evaluación

El objetivo de la evaluación es analizar los diferentes niveles de comprensión del concepto de derivada en el marco de la teoría APOE.

Se realizará al comienzo del Taller una evaluación de diagnóstico, para evaluar los saberes previos de los alumnos como son los conceptos de funciones, límites y continuidad, vinculados al concepto de la derivada y en base a los resultados de esta evaluación valorar los aspectos que se deben fortalecer en el desarrollo de la propuesta del Taller.

Los instrumentos de evaluación que se utilizaran son: cuestionarios, entrevistas, exposiciones orales. Los cuales permitirán realizar una evaluación ponderativa de los resultados obtenidos, para determinar si los objetivos propuestos fueron alcanzados.

Otro aspecto importante en la evaluación es el trabajo en equipo, un aspecto fundamental en el desarrollo del taller, y así de forma implícita evaluar la ética y los valores que son el fundamento de la implementación de un taller pedagógico.

Programación de actividades

Cuadro 2: Secuencia de contenidos a desarrollar en los talleres.

Contenido	Estrategia	Actividades
Recta secante	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas.	Encontrar la ecuación de la recta secante que pasa por dos puntos. Graficar.
Recta tangente	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra Explicación con diapositivas.	Determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por un punto determinado, conociendo su pendiente. Graficar
Pendiente de la recta tangente	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas.	Determinar la pendientede la recta utilizando la definición. Determinar la ecuación de la recta tangente. Graficar
Derivada de una Función	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas de cinemática.	Utilizar la definición de derivada de una función para determinar $f\,'(x)$.
Aplicaciones de la derivada de una función:	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas aplicando movimiento rectilíneo uniforme.	Resolver situaciones problemáticas para calcular la velocidad media y la velocidad instancia.
Aplicaciones de la derivada de una función	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas aplicandotasa de variación instantánea.	Resolver situaciones problemáticas vinculadasa la formación de Ingenieros, para determinar la tasa de variación instantánea.

Fuente: Elaboración propia

Recursos didácticos

Se trabajará con bibliografía específica de la Cátedra y con textos pertenecientes a los diferentes campos del conocimiento.

Se confeccionarán cuestionarios y entrevistas para la etapa de evaluación proceso. Se utilizará el software dinámico Geogebra, para el desarrollo de las Clases Teórico - Prácticas, además de la utilización de data y pizarra para el desarrollo de conceptos y aplicaciones de los contenidos propuestos.

6.4 Actividades con Geogebra

Actividad Nº 1

El objetivo es visualizar como la recta secante se aproxima a la recta tangente a medida que Δx tiende a cero. Se plantean las siguientes actividades para los alumnos:

a) Definir una función cuadrática a través de los coeficientes a, b y c mediante los deslizadores.
b) Definir dos puntos sobre la curva j y k, mediante los deslizadores.
c) Definir el cociente incremental Δx y Δy
d) Analizar la variación de la pendiente de la recta secante acercando el punto j al punto k, y observar como varia el valor de la pendiente de la recta secante que es el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, hasta lo máximo se pueda aproximar sin que el cociente sea indeterminado.
e) Calcular analíticamente el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto j
f) Comparar resultados.

En figura 1 se presenta una captura de pantalla del applet correspondiente a esta actividad

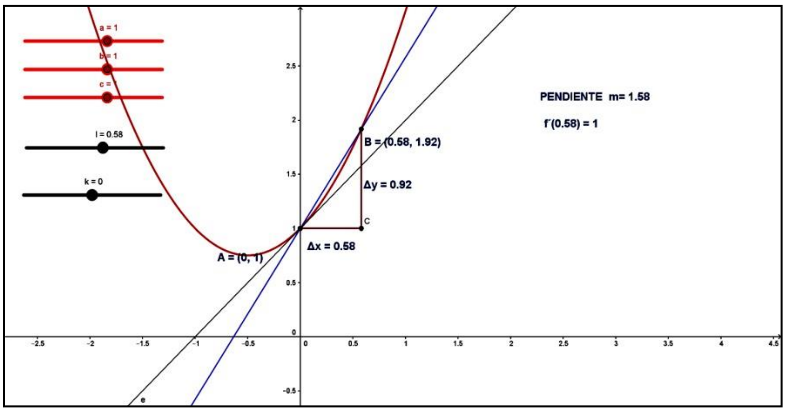


Figura 1: Actividad Nº 1 con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

Actividad Nº 2

El objetivo es visualizar la función y su derivada, reconociendo los intervalos donde la función es creciente, decreciente y los extremos relativos de la función (máximos y mínimos). Se plantean las siguientes actividades para los alumnos:

a) Definir una función cubica a través de los coeficientes a, b, c y d mediante los deslizadores.
b) Observar los intervalos donde la función es creciente y decreciente, analizando los signos de la derivada donde se puede visualizar si la misma es positiva, negativa o cero.
c) Determinar en función de lo observado, la abscisa de los máximos y mínimos relativos correspondientes a la función.
d) Definir el deslizador k, el cual permite observar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto del dominio de la función.

En figura 2 se presenta una captura de pantalla del applet correspondiente a esta actividad.

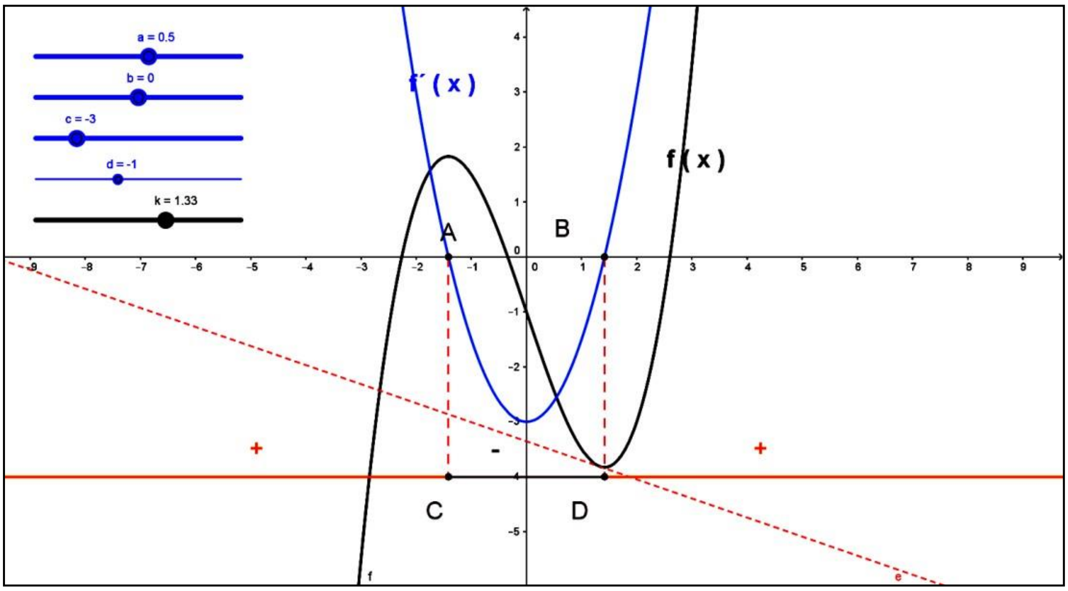


Figura 2: Actividad Nº 2 con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

6.5 Uso del aula virtual

Las actividades a desarrollar a través del aula virtual consisten en autoevaluaciones con preguntas de opción múltiple utilizando la plataforma Moodle, las cuales tienen por objetivo el autoaprendizaje de los alumnos. En este caso la retroalimentación de las respuestas es inmediata permitiendo así que detecten sus errores y/o dificultades y sean capaces de realizar una autocorrección.

CAPÍTULO 7 FASE DE EVALUACIÓN

La fase de evaluación comprende los momentos de seguimiento de la aplicación de las diferentes actividades que constituyen la propuesta de innovación pedagógica y la evaluación general de la propuesta. En esta fase adquiere pleno sentido los principios de dirección y carácter, tiene en el momento del seguimiento su principal actividad a desarrollar, ya que si se toma en consideración que la innovación tiene una direccionalidad no lineal no es posible realizar simplemente una evaluación final que se circunscriba a los resultados sin tener en cuenta el proceso y las eventualidades propias de toda puesta en marcha de un proyecto o propuesta de innovación (Barraza Macías, 2013).

7.1 Fundamentación

Respecto a la evaluación Steiman (2018) la define de la siguiente manera:

> *Se define a la evaluación didáctica como un proceso que, a partir del conocimiento y comprensión de cierta información, permite, desde una actitud dialógica, emitir un juicio de valor a cerca de las prácticas de enseñanza y aprendizaje en un contexto socio histórico determinado en el cual intervienen la institución, el objeto de conocimiento, el grupo de alumnos, el docente y que posibilita tanto el tomar decisiones referidas a las prácticas de referencia como exige comunicar a docentes y alumnos – por medio de enunciados argumentativos – el juicio de valor emitido y las orientaciones que derivan de este, resulten necesarios para la mejora de la práctica*. (p.143)

El mismo autor Steiman (2018) considera necesario desagregar la definición de evaluación para presentar algunos problemas inherentes a las prácticas de la evaluación. Entre sus consideraciones se pueden citar:

> *(…) proceso que": aparece desde aquí la referencia a la evaluación como proceso y no como punto de llegada. La idea procesual de la evaluación la*

presenta como un conjunto de acciones que se realizan y suceden en el tiempo con una determinada intencionalidad.

(…) a partir del conocimiento y comprensión de cierta información: la referencia al conocimiento y compresión de la información plantea en primer lugar la pregunta referida a que es lo que se desea conocer y comprender y luego; la pregunta a como se hará para conocer y comprender esa información.

(…) desde una actitud dialógica": la evaluación didáctica no puede concebirse en ningún caso como un proceso unilateral, sencillamente porque, por lo menos hay dos partes involucradas. Si cualquiera de ellas asumiera una actitud de imposición, de autoritarismo, de soberbia o indiferencia, atentaría contra el carácter esencialmente humano que es propio de cualquier actividad pedagógica.

(…) emitir un juicio de valor: obliga a pensar tanto en el problema de quien emite el juicio valorativo como en el problema de la devolución de la evaluación y en aquello que se suscita a partir de la evaluación realizada.

(…) acerca de las prácticas de enseñanza y /o las prácticas de aprendizaje": se desprende de este enunciado el tema de evaluar y desde allí el problema de los criterios de evaluación.

(…) en un contexto socio histórico determinado en el cual intervienen lo social amplio, la institución, el objeto de conocimiento, el grupo de alumnos y el docente": se está frente a variables contextuales que direccionan, favorecen, obstaculizan, y hace que los factores intervinientes sean de mayor o menor peso, que exigen ser considerados a lo largo de todo el proceso evaluador.

(…) posibilita tomar decisiones referidas a las prácticas de referencia": lo que hace detener particularmente en el sentido de la evaluación y especialmente en las decisiones a tomar a partir de la comprensión de la vinculación entre la información que se obtiene y las prácticas de enseñanza y aprendizaje involucradas. (p.144 -146)

Para Steiman (2018) es necesario desarrollar algunos planteos conceptuales sobre la evaluación como una práctica compleja:

- ✓ El problema acerca del objeto de la evaluación.
- ✓ El problema acerca de los momentos de la evaluación.
- ✓ El problema acerca del sujeto de la evaluación.
- ✓ El problema acerca de los instrumentos de la evaluación.

7.2 Criterios de evaluación

Es necesario decidir qué evaluar de las prácticas de la enseñanza, y para ello se considera algunos de los aspectos sobre los criterios de evaluación.

La determinación de los criterios tiene una triple función. En primer lugar integra la decisión metodológica que se realiza desde la cátedra con la evaluación, dando por supuesto que, si se espera obtener cierta cualidad, esta deberá ser trabajada en la cursada. Como ejemplo si en el trabajo con los contenidos de una unidad curricular se considera que los alumnos deben lograr resolver situaciones problemáticas que integren teoría con práctica, entonces se trabaja durante el cursado con dichas situaciones a fin de facilitar que los alumnos aprendan a resolverlas.

En segundo lugar los criterios funcionan, para la propia cátedra, como el eje desde el cual plantear la evaluación con función de acreditación y como un elemento de monitoreo entre aquello que espera se incorpore como aprendizaje y la verificación del mismo.

En tercer lugar los criterios explicitados orientan a los alumnos ya que contarán con una descripción cualitativa de cómo encarar su aprendizaje con relación a los contenidos.

Para Matthew Lipman (1997) citado por Steiman (2018) existen los criterios de los criterios, como los denomina los meta criterios: relevancia, confiablidad y fuerza. Un criterio es relevante si es pertinente al contenido que se está evaluando; es confiable si ha favorecido la orientación del proceso de acreditación hacia aquello que se considera "digno de ser evaluado" por su potencialidad epistemológica y ética; tiene fuerza si comparado con otros criterios posibles guía mejor que estos la realización de los juicios valorativos implicados en la acreditación. Los criterios son una derivación de decisiones personales, pero sobre todo una derivación de la especificidad disciplinar.

Los criterios definen "lo que se espera" de algo que se evalúa, es decir, que por medio de estos se puede realizar la "lectura" del objeto evaluado y compararlo con un referente o estándar de desempeño. En este sentido, establecen el nivel requerido y esperado de los aprendizajes y definen cuándo se considera que un alumno ha conseguido un objetivo determinado. El planteamiento de los criterios de evaluación requiere de una especificación de los aspectos a evaluar a través de indicadores concretos, consensuados, comunes, y conocidos por los sujetos de la evaluación, los cuales son utilizados para designar una base de referencia para el juicio de valor que se establece al evaluar.

La evaluación basada en criterios previamente establecidos, permite al docente hacer un análisis de resultados de aprendizaje más íntegro dentro de un mismo objetivo para conocer en qué medida cada uno de sus alumnos ha logrado los conocimientos o competencias específicas y por ende cuánto de los contenidos vistos en clases han sido efectivamente entendidos. Por otra parte, que el docente conozca anticipadamente y específicamente lo que se espera que logren los alumnos facilita su tarea en el desarrollo del material didáctico efectivo para su asignatura, en la medida en que sus guías de aprendizaje, ejercicios y otros estén asociados a las pautas de evaluación preestablecidas. Estos criterios de evaluación deben ser entregados a los alumnos desde un inicio, es decir, previo al proceso de enseñanza y aprendizaje, de esta forma los alumnos y docentes comprenden y pretenden lo mismo en las situaciones de evaluación, lo que facilita al docente elaborar pruebas más justas y a los alumnos estudiar mejor y tener mayores opciones de obtener buenos resultados.

7.3 Momentos de la evaluación

La evaluación inicial o diagnóstica tiene por finalidad tomar conocimiento del estado de situación de partida en relación con los saberes apropiados por los alumnos y obtener cierta información sobre ellos, que resultan necesarias para tomar decisiones relativas a la enseñanza y que opera como un insumo de contexto en la construcción de la clase: ¿a quienes se enseña? ¿En qué tipo de prácticas sociales, laborales, culturales participan? ¿Qué saberes disponen de este tipo de conocimiento?

La evaluación de seguimiento o formativa tiene que dar cuenta de un proceso que permita comprender como el alumno se está enfrentando cognitivamente (Allal, 1980), citado por Hernández, Ruiz y Tigrero (2020) con la tarea que se le viene proponiendo. Fundamentalmente, tiene que promover la autoevaluación, es decir, tiene que permitir a las propios alumnos la toma de conciencia del proceso de aprender (Litwin. 1998), citado por Audisio, Terradez, Delgado, Martino, Vaamonde, Torales, y Ferrer (2018), los propios juicios de valor respecto a que, como y cuando se está aprendiendo. Se necesita, desde la evaluación de seguimiento, detectar errores para orientar a tiempo el proceso de aprender. Para que esto sea posible, es necesario poner a los alumnos en situaciones activas de aprender.

La evaluación final o sumativa involucra la evaluación final, las prácticas de evaluación para la acreditación: las evaluaciones parciales y finales. Es la evaluación de cierre del cursado y adquiere formatos diferentes según los casos. (Steiman, 2018)

7.4 Tipos de evaluación

Casanova (2007) refiere que la autoevaluación se produce cuando el sujeto evalúa sus propias actuaciones, es un tipo de evaluación que toda persona realiza a lo largo de su vida; en este caso, es de suma importancia que el alumno realice de forma continua ejercicios de valoración de su aprendizaje, de manera que le sea posible identificar aspectos que debe mejorar. En la medida en que un alumno logre contrastar sus avances contra estándares de actuación establecidos, podrá identificar áreas de mejora, con lo cual estará en condiciones de regular su aprendizaje hacia el logro de competencias útiles para su desarrollo social y profesional.

La coevaluación, la describe como la evaluación mutua, conjunta de una actividad o trabajo determinado realizado entre varios. En este caso, lo recomendable es que después de una serie de actividades didácticas, los participantes tanto alumnos como el profesor evalúen ciertos aspectos que consideren importantes de tal actuación conjunta. Generalmente tras un trabajo en equipos, de manera natural, cada uno valora lo que le ha parecido más interesante de los otros, por ejemplo se puede valorar si las actividades resultaron atractivas, si el contenido del trabajo realizado es pertinente, si el nivel de colaboración facilitó el logro de los objetivos, etc.; es muy importante en la conducción de estos procesos de coevaluación pedir a los alumnos que se centren en la valoración tanto de los aspectos positivos o que ellos consideren como los más destacados, como en aquellos que es necesario trabajar más para mejorar la calidad del trabajo desarrollado en conjunto.

La heteroevaluación consiste en la evaluación que realiza una persona sobre el trabajo, actuación o rendimiento de otra persona. Es aquella que habitualmente hace el profesor de sus alumnos. Dado que es un proceso importante e imprescindible de control en los esquemas y modelos educativos vigentes, rico por los datos y posibilidades que ofrece, delicado por el impacto que tiene en las personas evaluadas, y complejo por las dificultades técnicas que supone la emisión de juicios de valor válidos y objetivos; es que se propone esta guía práctica para profesores.

7.5 Instrumentos de evaluación

El instrumento debe presentar el grado de organización suficiente para que la apreciación que efectúa del aprendizaje permita desprender algunas conclusiones acerca del desempeño presente y futuro del alumno, en cuestiones específicas pero también como visión integral. Cada uno de los instrumentos de evaluación resuelve estos problemas de diversas maneras. Actúa como un reflector que en el escenario ilumina a algunos personajes y deja en penumbra a otros, que sin embargo están allí presentes, pero con una clase diferente de presencia. Por esta razón, la elección de los instrumentos de evaluación adecuados a la hora de diseñar el programa de evaluación de un curso, constituye una de las decisiones más importantes para garantizar el valor didáctico de la evaluación en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje. De Camilloni, Celman, Litwin y Palou de Maté (1998) citados en Ubillús Solís (2019).

7.6 Propuesta de evaluación

Una vez presentado el marco teórico se desarrolla la propuesta de Evaluación para validar si se logró el objetivo planteado que a través de una secuencia didáctica el alumno logre comprender el concepto derivada de una función en un punto, desde el marco de la teoría APOE y utilizando como herramienta de visualización el software dinámico GeoGebra.

Los criterios de Evaluación propuestos por la Catedra están redactados en forma genérica para todos los contenidos de la Asignatura, se pueden precisar para el concepto de derivada de una función que es objeto de este trabajo.

- Utilizar adecuadamente los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral.
- Resolver modelos matemáticos aplicando los conceptos del cálculo diferencial e integral.
- Aplicar el cálculo diferencial e integral para el estudio de innumerables fenómenos científicos y tecnológicos en el campo de la ingeniería.
- Utilizar programas específicos para resolver problemas de aplicación relacionados al campo disciplinar.

Los tipos de evaluación utilizados son la evaluación diagnóstica, formativa y final:

Para la **evaluación inicial** se desarrollara un examen preliminar o de diagnóstico durante el desarrollo de los talleres, para obtener información sobre los conocimientos generales y específicos de los estudiantes en relación a los contenidos que se van a desarrollar.

Para la **evaluación formativa** se emplearan exámenes escritos y trabajos prácticos. La cual tiene el propósito fundamental de determinar en qué nivel se ha logrado el aprendizaje en cada una de las unidades del programa. Es fundamental para perfeccionar la enseñanza de acuerdo a los resultados parciales que se vayan obteniendo. Informar sobre el accionar pedagógico y el desarrollo integral de cada estudiante, permite revisar los distintos factores que interactúan e intervienen en el proceso de aprendizaje, las decisiones que se toman después de su aplicación. Como evaluación formativa se desarrollaran:

- Cuatro parciales escritos que comprenden ejercicios prácticos de desarrollo y resolución de problemas de aplicación. El concepto de derivada de una función será evaluado en el segundo Parcial correspondiente al primer cuatrimestre del dictado de la materia.
- Resolución de situaciones problemáticas acordes a la especialidad de la ingeniería que cursan.
- Presentación grupal (trabajo colaborativo) de una propuesta creativa sobre un tema específico, con aplicaciones a la ingeniería.
- Utilización de un software específico (Geogebra) para el desarrollo de los trabajos prácticos y la presentación grupal de la propuesta mencionada.

Para la **evaluación final**, la modalidad del examen será escrita y oral. La cual permite estimar los logros alcanzados al final de un período sobre las competencias y habilidades adquiridas. Es una evaluación para la acreditación de la asignatura y proporciona información significativa.

La elección de los instrumentos de evaluación adecuados a la hora de diseñar el programa de evaluación, constituye una de las decisiones más importantes para garantizar el valor didáctico de la evaluación en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Los instrumentos de Evaluación seleccionados son los siguientes:

La evaluación diagnóstica se desarrollara a través de diferentes situaciones problemáticas.

En la evaluación formativa se utilizaran pruebas escritas de ejercicios de desarrollo y situaciones problemáticas.

La evaluación final será un examen escrito y oral. Steiman (2018) afirma:

> *Resulta un buen instrumento si la interrogación ayuda a que el alumno evaluado pueda ir elaborando un discurso en el que las relaciones conceptuales se vayan encadenando naturalmente a partir del desarrollo de las ideas eje de una unidad curricular y las ideas globales vayan hilvanando la inclusión de los conceptos particulares. Existen diferentes posibilidades de acuerdo a quien evalúa: se puede pensar en que el alumno comience su*

exposición habiendo elegido un tema que a medida que lo presenta, va vinculando con los contenidos de la unidad curricular; se puede pensar en que el alumno comience su exposición a partir de la presentación de una elaboración personal previamente preparada. (p.173)

7.1.1 Autoevaluación

Para la autoevaluación se confeccionaron cuestionarios con preguntas de múltiple opción utilizando el aula virtual, para que el alumno realice de manera autónoma y continua ejercicios de valoración de su aprendizaje, y sea posible identificar los aspectos que debe mejorar. Esta instancia de evaluación es muy útil como un proceso de retroalimentación tanto para el alumno como para el docente, ya que en base a los resultados obtenidos se puede ver el avance de los alumnos en la comprensión de los conceptos, en este caso el concepto de derivada de una función en un punto.

La plataforma tiene la característica de brindar al alumno los resultados de su autoevaluación y al docente estadísticas generales y particulares de las producciones de los alumnos, esta información puede ser utilizada por el docente para retroalimentar el proceso.

Se muestra a continuación un cuestionario de Autoevaluación correspondiente a la Unidad Nº 5 sobre el concepto de derivada de una función en un punto.

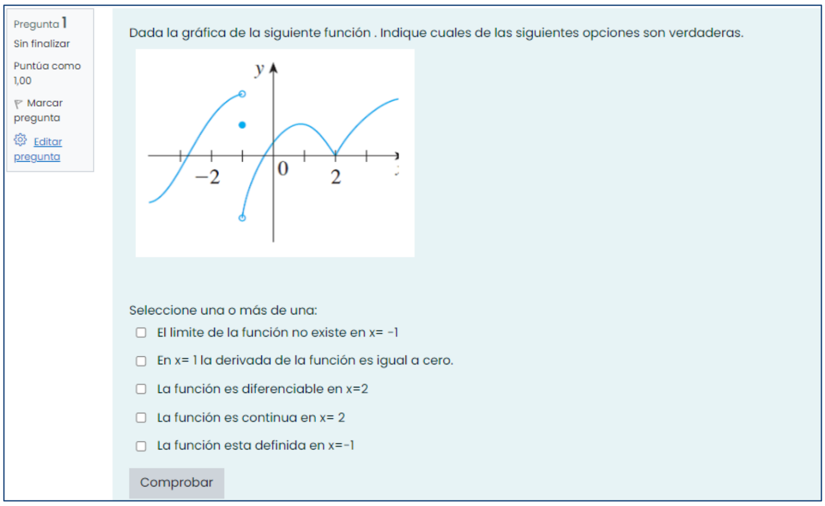


Figura 1: Captura de pantalla - Pregunta Nº 1. Fuente: elaboración propia.

Pregunta **2**
Sin finalizar
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

La posición de una partícula esta dada por la siguiente función $s(t) = t^3 - 4t^2$ donde t se mide en segundos y s en metros. ¿ Cual es la aceleración en el instante t= 4 s ?

Seleccione una:

- a = 14 m/s^2
- a = -16 m/s^2
- a = 16 m/s^2
- a = 12 m/s^2
- a = 0 m/s^2

Comprobar

Figura 2: Captura de pantalla - Pregunta Nº 2. Fuente: elaboración propia.

Pregunta **3**
Sin finalizar
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto de su dominio x= 2 es:

Seleccione una:

- m = 8
- m= - 6
- m = 0
- m = 4
- m = 6

Comprobar

Figura 3: Captura de pantalla - Pregunta Nº 3. Fuente: elaboración propia.

Pregunta **4**
Sin finalizar
Puntúa como 1,00
Marcar pregunta
Editar pregunta

La posición s(t) en metros respecto al tiempo esta determinado por la ecuación $s(t) = 3t^2 - 6t$ ¿ Cual es la velocidad instantánea en el instante t= 10 s ?

Seleccione una:

- v= 0 m/s
- v= 60 m/s
- v= 50 m/s
- v= 40 m/s
- v= 54 m/s

Comprobar

Figura 4: Captura de pantalla - Pregunta Nº 4. Fuente: elaboración propia.

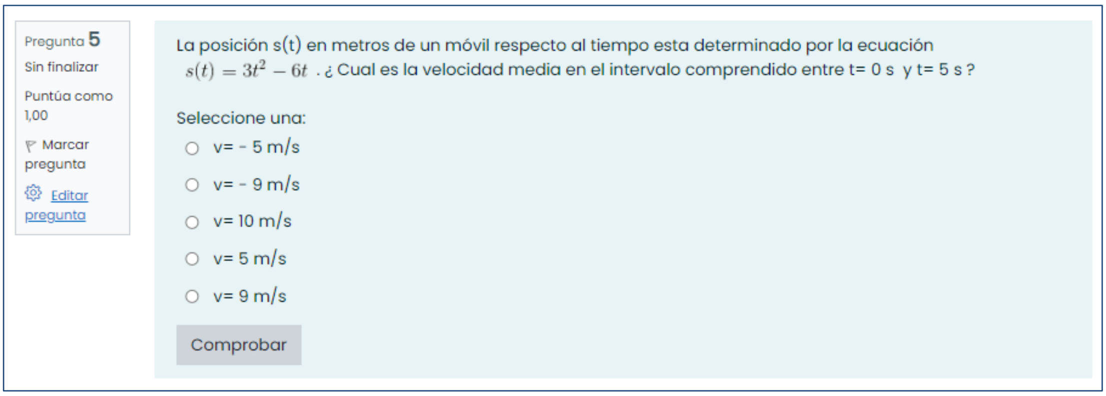


Figura 5: Captura de pantalla - Pregunta Nº 5. Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se logró cumplir con los objetivos específicos planteados, al inicio de esta propuesta.

Respecto al primer objetivo específico, se presentó en el marco de la teoría que sustenta este trabajo una descomposición genética del concepto en estudio, que sugiere que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, Gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada en el marco de la teoría APOE. La descomposición genética es una hipótesis de cómo el estudiante interioriza el concepto, por lo que de ella se deriva la propuesta didáctica y las actividades utilizando software GeoGebra.

Respecto al segundo objetivo específico, se diseñaron aplicativos matemáticos (Applets) que permiten la visualización del concepto derivada de una función en un punto, coordinando los registros gráfico y analítico del concepto en estudio de acuerdo a la descomposición genética propuesta. En el primer aplicativo se visualiza la derivada de una función en un punto y el segundo estudia el concepto de la función derivada.

El tercer objetivo consistió en el diseño de actividades que permitan aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, especialmente de la física, ciencia fuertemente vinculada a la formación de ingenieros. En ese sentido se pueden plantear problemas de cinemática, utilizando funciones del tipo $x = f\ (t)$ siendo x la posición de un móvil respecto a un sistema de referencia y t el tiempo que emplea para alcanzar dicha posición.

Finalmente se elaboró una secuencia didáctica del concepto de derivada de una función en un punto fundamentada en la descomposición genética propuesta de acuerdo al marco teórico de referencia.

En relación a los objetivos específicos antes mencionados se puede afirmar que se logró cumplir con el objetivo general en el cual se plantea una propuesta didáctica innovadora en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra fundamentado en la teoría APOE.

Con esta propuesta didáctica se espera superar las dificultades que presentan los alumnos de primer año de las carreras de Ingenierías relacionadas con la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto las cuales fueron mencionados en capítulos anteriores. El uso del software dinámico Geogebra permite al alumno la coordinación del camino gráfico y algebraico, que a través de sus vistas geométricas y algebraicas por su carácter de software dinámico aporta visualmente mayor cantidad de elementos que la observación de imágenes estáticas.

Una propuesta para la continuación del trabajo presentado se basaría en analizar los diferentes niveles de comprensión del concepto de derivada usando el software dinámico Geogebra en el marco de la Teoría APOE. Esta investigación futura permitiría validar la descomposición genética propuesta o realizar las modificaciones que surjan de futuras investigaciones, debido a que la descomposición genética no es estática sino dinámica, la cual se puede modificar o mejorar de acuerdo a cada cohorte de alumnos y sus niveles de comprensión.

REFERENCIAS

Amaya, C. S., Rojas, H. D., y Ballen, M. B. (2009). Descripción de niveles de comprension del concepto derivada. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (26).

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.

Audisio, E. O., Terradez, M., Delgado, C. J., Martino, P. L., Vaamonde, J. D., Torales, M. M., & Ferrer, M. L. (2018). La evaluación formativa, compartida e integradora como herramienta pedagógica en la universidad. *In Memorias de las Jornadas Nacionales y Congreso Internacional en Enseñanza de la Biología* (Vol. 1, No. Extraordinario, pp. 869-874).

Badillo, E., y Azcárate, C. (2002). Conocimiento profesional de profesores de Matemática de secundaria. Las relaciones entre Derivada y Velocidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial. *Primeres Jornades d' Educació Matemática de Catalunya*, Mataró Barcelona.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona-España

Barraza Macias, A. (2013). *La ruta metodológica para la construcción de proyectos de innovación*. *Cómo elaborar proyectos de innovación educativa*, 29-69.

Bermúdez, E. A. (2013). *Una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado*. Atenas, 3(23), 56-69.

Casanova, M. A. (2007): *Manual de Evaluación Educativa*. 9ª ed. Madrid, España, Editorial la Muralla, S. A.

Córdoba, Y. Ruiz, K. Y., y Rendón, C. E. (2015). *La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica*. RECME, 1(1), 125-130

Davini, M.C. (2008) Métodos de la enseñanza. *Didáctica General para Maestros y Profesores* Ed. Santillana. Buenos Aires

Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.

Dubinsky, E., y McDonald, M. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *New ICMI Study Series*. 1991.

Flores, C. D., y García-García, J. (2017). Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 158-180.

Gallo, H. G., Verón, C. A., & Herrera, C. G. (2019). Interpretación de transformaciones lineales en el plano utilizando GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (24), 32-37.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experienciasdidácticas*, 109-130

Gómez-Chacón, I. M. (2014). Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas. *Atas do XXV Seminário de |Investigação em Educação Matemática*, 5-28.

Gonçalves, D. C., y Reis, F. D. S. (2013). Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(46), 417-432.

Gutiérrez, L., y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia*, 6(3), 104-122.

Hernández, M., Ruiz y Tigrero, F. (2020). Evaluación del aprendizaje: Acciones y resultados de una experiencia de investigación en la educación superior de Ecuador. *Revista Espacios*, 1(14), 1-19.

Habre, S., y Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function anits derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Hohenwarter, M., Preiner, J., y Yi, T. (2007). Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level. In *Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematic.*

Kleiner, I. (2001). History of the Infinitely Small and Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 137-174.

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación matemática*, 20(2), 65-89.

Londoño, N., Mederos, O., y Decena, V. G. (2018). GeoGebra como herramienta tecnológica para entender las derivadas y sus aplicaciones. *Revista Electrónica Amiutem*. 2(2), 90-98.

López Zamudio, A. (2008). Propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, un acercamiento visual con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, 2010(71), 41-52.

Pereyra, N. E., & Herrera, C. G. (2020). *Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función*. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 15(2), 48-58.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 199-232

Sánchez-Matamoros, G., Mercedes, G., & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(45), 281-302.

Sari, P., Hadiyan, A., y Antari, D. (2018). Exploring derivatives by means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2(1), 65-78.

Scorzo, R., & Favieri, A. (2019). Test sobre imágenes mentales y conceptuales con uso de software sobre asíntotas de funciones. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 102, 7-27.

Soto, M., Herrera, C. G., & Pereyra, N. E. (2019*).* Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(55).

Steiman, J. (2018). *Más didáctica (en la educación superior) (Vol. 3)*. Miño y Dávila..

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1).

Ubillús Solís, M. (2019). *Gestión educativa y el desempeño docente universitario en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Piura*, Piura 2018.

Urquieta, M., Yañez, J. C., y Andrade, J. S. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS* del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 403-429.

ANEXOS

<table>
<tr><td colspan="5">UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS</td></tr>
<tr><td colspan="5">CICLO COMUN ARTICULADO</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="4"><u>PROGRAMA DE</u>:

ANÁLISIS MATEMÁTICO I</td><td>Código: 602 CCA
I.M.: C01-602; I.A.: C02-602;
I.E.: C06 -602; I.I.: C07-602</td></tr>
<tr><td>Área: Ciencias Básicas</td></tr>
<tr><td>Curso: 1º Año</td></tr>
<tr><td>Plan: 2004 (I.E., I.A., I.M.)
2011 (I.I)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Carga horaria Total: 165</td><td>Régimen: Anual</td></tr>
<tr><td colspan="4">Horas</td><td>Cuerpo Docente</td></tr>
<tr><td>Teórico – Práctico</td><td colspan="3">Actividad de Formación Práctica:</td><td rowspan="3">Lic. Argüello, Mónica Adriana
Ing. Lobo, Ada Patricia
Lic. Verón, Claudio Ariel
Lic. Fabbris, Domingo A.</td></tr>
<tr><td></td><td>FE</td><td>RPI</td><td>ADyP</td></tr>
<tr><td>165</td><td>--</td><td>--</td><td>--</td></tr>
<tr><td colspan="5">Correlativas</td></tr>
<tr><td colspan="5">--</td></tr>
</table>

OBJETIVOS:

Que el alumno sea capaz de:

- ✓ Comprender los conceptos fundamentales de la teoría de funciones de una variable real
- ✓ Resolver problemas del Cálculo Diferencial e Integral
- ✓ Crear y resolver modelos matemáticos
- ✓ Aplicar el Cálculo Diferencial e Integral para el estudio de innumerables fenómenos científicos, tecnológicos y el análisis del comportamiento de variables de diversos campos del conocimiento
- ✓ Reconocer la importancia del Cálculo y el valor que tiene como herramienta y como lenguaje y descubrir las innovaciones que su conocimiento aporta
- ✓ Lograr confianza en el uso del Cálculo para resolver problemas, comunicar ideas y razonar de maneras alternativas
- ✓ Aprovechar los medios alternativos de aprendizaje usando las nuevas tecnologías de información
- ✓ Revisar y reflexionar sobre su propio pensamiento y su actuación contrastando sus producciones con las de sus pares.
- ✓ Comprender la importancia del Calculo Diferencial e Integral en la Ingeniería.

<u>CONTENIDOS MINIMOS:</u>

Números reales. Funciones reales de una variable real. Límite de funciones reales. Continuidad. Derivación. Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones. Derivación numérica. La diferencial y la antidiferencial. Técnicas de integración. La integral definida. Aplicación de la integral definida. Integración numérica. Formas indeterminadas. Integrales impropias y fórmula de Taylor. Sucesiones y series numéricas reales. Series de potencias.

PROGRAMA ANALITICO:

Unidad Nº 1: Números reales. Sistema de los números reales. Axiomática. La lógica como su sustento. Conjunto numérico R. Caracterización. Desigualdades. Propiedades. Intervalos. Valor absoluto: definición y propiedades

Unidad Nº 2: Funciones reales de una variable real. Definición como regla de correlación entre los dos conjuntos de números reales y representación gráfica. Dominio y codominio. Operaciones con funciones. Composición. Tipos de funciones y funciones especiales.

Unidad Nº 3: Límite de funciones reales. Definición del límite de una función en un punto de su dominio. Interpretación gráfica. Teoremas sobre límites. Límites laterales. Límites infinitos y límites al infinito. Asíntotas horizontales y verticales.

Unidad Nº 4: Continuidad. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Operaciones con funciones continuas. Continuidad de la función compuesta. Continuidad a izquierda y a derecha. Discontinuidades.

Unidad Nº 5: Derivación. Recta tangente y derivada. Definición de derivada de una función; interpretación geométrica. Derivabilidad y continuidad. Derivadas laterales. Derivada numérica. Teoremas sobre derivadas de funciones algebraicas y derivadas de orden superior. Movimiento rectilíneo. Derivada como tasa de variación. Derivadas de las funciones trascendentes. Derivada de una función compuesta y regla de la cadena. Derivación implícita. Derivación logarítmica.

Unidad Nº 6: Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones. Máximos y mínimos de funciones. Aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio de Lagrange. Funciones crecientes y funciones decrecientes. Criterio de la primera derivada. Para extremos relativos. Concavidad, puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada para extremos relativos. Trazado de gráficas de funciones. Asíntotas en general. Aproximaciones mediante el método de Newton, de la recta tangente y de diferenciales.

Unidad Nº 7: La diferencial y la antidiferencial. Concepto de diferencial e interpretación geométrica. Álgebra de la diferenciación. La antidiferenciación. Técnicas de antidiferenciación. Ecuaciones diferenciales y movimiento rectilíneo.

Unidad Nº 8: Técnicas de integración. Integración inmediata. Integración por partes. Integración por sustitución trigonométrica. Integrales trigonométricas. Integración de funciones racionales. Integración mediante otras técnicas de sustitución y tablas.

Unidad Nº 9: La integral definida. Concepto de área. Suma de Riemann y de integral definida. Propiedades. El teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del cálculo integral.

Unidad Nº 10: Aplicación de la integral definida. Área de una región plana. Volúmenes de sólidos. Longitud de un arco de curva. Área de sólido de revolución. Integración numérica. Regla del trapecio. Fórmula de Simpson. Las funciones logaritmo natural y exponencial mediante integrales definidas. Integrales que producen funciones trigonométricas inversas. Integrales impropias.

Unidad Nº 11: Formas indeterminadas. Integrales impropias y fórmula de Taylor. Teorema del valor medio de Cauchy. La forma indeterminada 0/0. Regla de Bernoulli- L`Hôpital. Otras formas indeterminadas. Aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor.

Unidad Nº 12: Sucesiones y series numéricas reales. Sucesiones numéricas reales. Límite de una sucesión. Sucesiones monótonas y acotadas. Series infinitas de términos constantes. Series infinitas de términos positivos. Criterios de convergencia. Series de términos alternados. Convergencia absoluta y condicional. Criterio de la razón. Criterio de la raíz.

Unidad Nº 13: Series de potencias. Definición. Intervalo de convergencia. Teorema. Derivación e integración de series de potencias. Series de Taylor y Mac Laurin. Desarrollo de funciones en series de potencias. Series de potencias para logaritmos naturales y serie binomial.

ACTIVIDADES PRÁCTICAS:

TRABAJOS PRÁCTICOS

Trabajo Práctico N° 1: DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO DE LOS NÚMEROS REALES

Trabajo Práctico N° 2: FUNCIONES

Trabajo Práctico N° 3: LIMITE DE UNA FUNCION

Trabajo Práctico N° 4: LIMITES: LATERALES DE UNA FUNCION, INFINITOS, AL INFINITO. ASINTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES. CONTINUIDAD

Trabajo Práctico N° 5: PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE. DEFINICION DE DERIVADA. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Trabajo Práctico N° 6: DERIVACION DE FUNCIONES: ALGEBRAICAS, TRIGONOMETRICAS, COMPUESTA, IMPLICITA, LOGARITMICA, TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

Trabajo Práctico N° 7: COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES Y SUS GRAFICAS

Trabajo Práctico N° 8: LA DIFERENCIAL Y LA ANTIDEFIRENCIAL

Trabajo Práctico N° 9: TECNICAS DE INTEGRACION

Trabajo Práctico N° 10: INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES. FORMAS INDETERMINADAS

Trabajo Práctico N° 11: SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS

Trabajo Práctico N° 12: SERIES DE POTENCIAS

BIBLIOGRAFÍA:

Titulo	Autores	Editorial	Cant. Disp.
🕮 CÁLCULO DE UNA VARIABLE TRASCENDENTES TEMPRANAS	Stewart, James	Cengage Learning	1
🕮 EL CÁLCULO	Leithold, Louis	Oxford University Press	2
🕮 CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA	Purcell, Edwin y Varberg, Dale	Prentice Hall	1
🕮 CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA	Edwards y Penney	Prentice Hall	1
🕮 CÁLCULO EN UNA VARIABLE	Thomas, George	Adisson Wesley	1
🕮 CÁLCULO INFINITESIMAL	Thomas, George	Oxford University Press	1

CONDICIONES PARA REGULARIZAR

Para regularizar la asignatura, el alumno deberá cumplimentar los siguientes requisitos:

- ✓ 80% de asistencia a las clases de Trabajos Prácticos.
- ✓ Aprobación de cuatro (4) exámenes parciales, con nota 5 o más en una escala del 1 al 10.

Los alumnos podrán recuperar solo 2 exámenes parciales. Quienes desaprueben los exámenes parciales y los dos recuperatorios perderán automáticamente la condición de Regular.

El alumno logrará la Aprobación y Acreditación de la asignatura con:

- ✓ Examen final que abarcará los aspectos conceptuales, previa regularización de la misma con el cumplimiento de los requisitos descriptos anteriormente.

CONDICIONES PARA RENDIR LIBRE

Para rendir en condición de Libre, los alumnos deberán cumplir los siguientes requisitos:

- ✓ Solicitar autorización a la cátedra con diez (10) días de anticipación a la fecha prevista para el examen.
- ✓ El examen libre constará de dos partes escritas la primera sobre la resolución de ejercicios de las guías de Trabajos Prácticos, y la segunda sobre el desarrollo de conceptos teóricos de la materia. Todas estas instancias serán eliminatorias.

Lic. Mónica A. Argüello
Prof. Adjunta – Análisis Matemático I
Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas
Universidad Nacional de Catamarca

ACTIVIDAD OBLIGATORIA CON GEOGEBRA I

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1) Sea la función $f(x) = x^2 - x + 1$

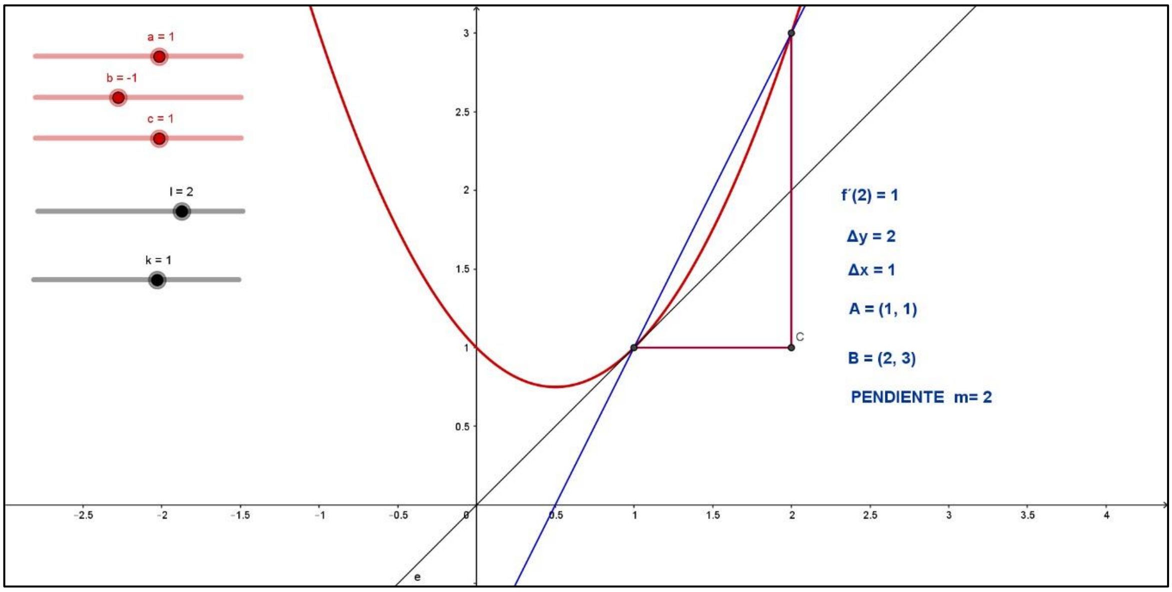
a) Calcular analíticamente la pendiente de la recta secante que pase por los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$
b) Calcular analíticamente la pendiente de la recta secante que pase por los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}5$
c) Calcular analíticamente la pendiente de la recta secante que pase por los puntos x_1 y x_2 según se indica en la siguiente tabla:

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Δx	Δy	m
1	2			1.0		
1	1.5			0.5		
1	1.3					
1	1.1					
1	1.05					
1	1.01					

2) Comprobar los resultados obtenidos analíticamente utilizando el applet de GeoGebra. Para ello hay que considerar el punto de abscisa $x_1 = K\ y\ x_2 = I$. Estos valores se pueden modificar con los deslizadores de color gris.

Los valores de la función cuadrática a, b, c se modifican con los deslizadores de color rojo.

Realizar las capturas correspondientes a cada caso en la vista geométrica de GeoGebra.



3) Determinar la derivada de la función $f(x) = x^2 - x + 1$ utilizando la definición.

4) Determinar la derivada de la función $f(x) = x^2 - x + 1$ utilizando reglas de derivación

5) Determinar la pendiente de la recta tangente a la función $(x) = x^2 - x + 1$ enel punto de abscisa $x_1 = 1$. Comparar con los valores de la tabla cuando x_2 se acerca a x_1.

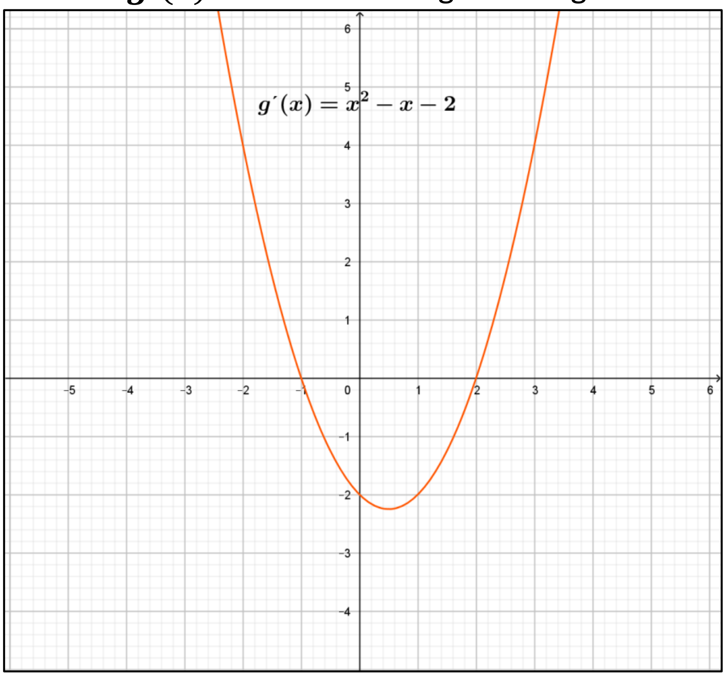
ACTIVIDAD OBLIGATORIA CON GEOGEBRA II

ESTUDIO DE LA FUNCION DERIVADA

1) Realizar las siguientes actividades utilizando software GeoGebra:
   a) Utilizando el Applet ESTUDIO DE FUNCIONES de GeoGebra graficar la función
      $f(x) = x^3 + x^2 - x$
   b) Utilizando el deslizador k, indique para que valores de x la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ es nula.
   c) Analice en la vista gráfica los valores donde la derivada $f'(x)$ es nula.
   d) Analice en la vista gráfica los intervalos donde la función $f'(x)$ es positiva o negativa.
   e) Analice en la vista gráfica los intervalos donde la función $f(x)$ es creciente o decreciente.
   f) Determine gráficamente los puntos críticos de la función $f(x)$.

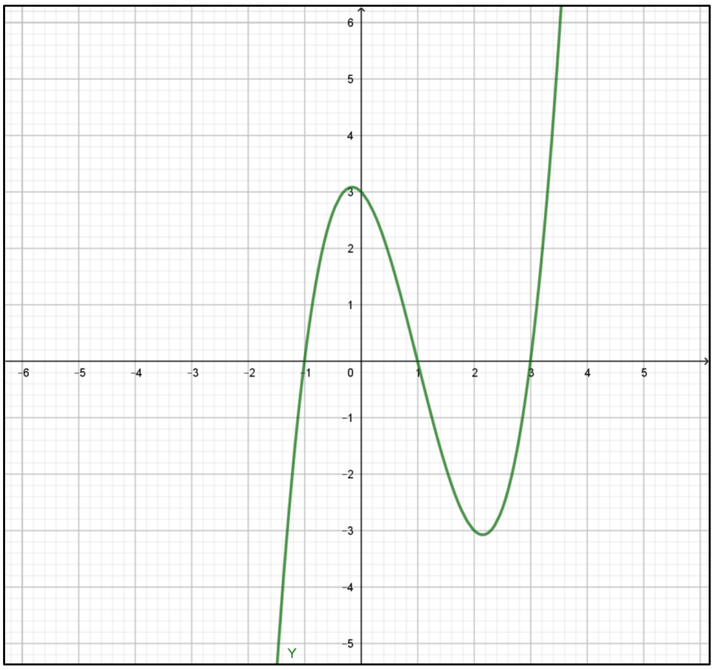
2) Verifique analíticamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus puntos críticos utilizando el criterio de la primera derivada.

3) Sea la función derivada $\boldsymbol{g'(x)}$ indicada en la siguiente figura



a) Indique, justificando su respuesta, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $g\ (x)$.
b) Indique las abscisas de los puntos críticos de $g\ (x)$. Y determine si se trata de un máximo relativo o mínimo relativo.
c) Indique, justificando su respuesta, los intervalos donde la gráfica de $g\ (x)$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
d) Indique las abscisas de los puntos de inflexión de $g\ (x)$.

4) Sea el gráfico de una función derivada $\boldsymbol{h'(x)}$ siguiente:



a) Indique los puntos del dominio de $h(x)$ donde su derivada es nula.
b) Indique, justificando su respuesta, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $h(x)$.
c) Indique las abscisas de los puntos críticos de $h(x)$. Determine si se trata de un máximo relativo o mínimo relativo.
d) Indique, justificando su respuesta, los intervalos donde la gráfica de $h(x)$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
e) Indique las abscisas de los puntos de inflexión de $h(x)$.